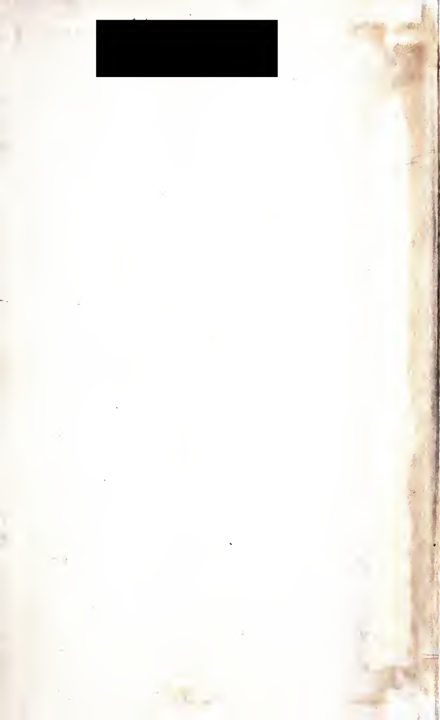
Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ





[redacted]

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для физико-математических средних школ
и проведения факультативных занятий*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517
З-50
УДК 519(022)

При редакционном участии

К. А. СЕМЕНДЯЕВА

АННОТАЦИЯ

Книга «Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике», написанная физиком-теоретиком академиком Я. Б. Зельдовичем, рассчитана на школьников старших классов, учащихся техникумов и лиц, занимающихся самообразованием, она может быть полезна и студентам 1-го курса вузов и втузов.

В книге в наиболее простой, наглядной и доступной форме объясняются основные понятия дифференциального и интегрального исчисления. Далее даются сведения, необходимые для практического применения высшей математики к задачам физики и техники. На основе высшей математики рассмотрено большое число физических вопросов: радиоактивный распад, ядерная цепная реакция, законы механики, в частности реактивное движение и космическая скорость, молекулярное движение. Рассмотрены электрические явления и, в частности, теория колебаний, лежащая в основе радиотехники. Наряду с математическим исследованием очень подробно изложена физическая сущность рассматриваемых явлений.

Яков Борисович Зельдович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ

М., 1970 г., 560 стр. с илл.

Редактор *А. А. Овчинников*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 20/X 1969 г. Подписано к печати 17/III 1970 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 17,5. Условн. печ. л. 29,40 Уч.-изд. л. 29, 92
Тираж 250 000 (1-й завод—100 000) экз. Т-00247. Цена книги 94 к.
Заказ № 455.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, М-54, Валовая, 28.

2-2-3
22-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к пятому изданию 7

Глава I. **Понятие производной и интеграла** 11

§ 1. Движение, путь и скорость 11
§ 2. Производная функции — предел отношения приращений 15
§ 3. Обозначения производной. Производная степенной функции 17
§ 4. Приближенное вычисление значений функции с помощью производной 23
§ 5. Касательная к кривой 26
§ 6. Рост и убывание, максимум и минимум функций . . 33
§ 7. Определение пути по скорости движения и площадь под кривой 39
§ 8. Определенный интеграл 46
§ 9. Связь между интегралом и производной (теорема Ньютона — Лейбница) 52
§ 10. Интеграл от производной 55
§ 11. Неопределенный интеграл 57
§ 12. Свойства интегралов 65
§ 13. Средние значения 71
§ 14. Различные примеры производных и интегралов . . 75
Заключение 83

Глава II. **Вычисление производных и интегралов** 84

§ 1. Знак дифференциала. Производная суммы функций 84
§ 2. Производная обратной функции 86
§ 3. Сложная функция 88
§ 4. Производная произведения функций 91
§ 5. Степенная функция 94
§ 6. Производные алгебраических функций с постоянными показателями 98
§ 7. Показательная функция 99
§ 8. Число e 102
§ 9. Логарифмы 106
§ 10. Тригонометрические функции 109
§ 11. Обратные тригонометрические функции 114
§ 12. Производная функции, заданной неявно 117

§ 13. Интеграл. Постановка задачи 121
§ 14. Простейшие интегралы 122
§ 15. Общие свойства интегралов 124
§ 16. Замена переменной в определенном интеграле . . . 131
§ 17. Ряды 136
§ 18. Вычисление значений функций при помощи рядов 144
§ 19. Условие применимости рядов. Геометрическая прогрессия 149
§ 20. Бином Ньютона для целых и дробных показателей 156
§ 21. Порядок возрастания и убывания функций 160
Приложение к главе II 165

Глава III. **Приложения дифференциального и интегрального исчисления к исследованию функций и геометрии**

§ 1. Исследование максимумов и минимумов функций при помощи второй производной 172
§ 2. Другие виды максимумов и минимумов. Изломы и разрывы 181
§ 3. Вычисление площадей 190
§ 4. Средние значения 195
§ 5. Длина дуги кривой и кривизна 198
§ 6. Приближенное вычисление длины дуги 202
§ 7. Вычисление объемов. Объем и поверхность тела вращения 207
§ 8. Как надо строить кривые 211

Глава IV. **Функции и графики** 215

§ 1. Функциональная зависимость 215
§ 2. Координаты 218
§ 3. Геометрические величины, выраженные через координаты 222
§ 4. Графическое изображение функций. Уравнение прямой 226
§ 5. Парабола 231
§ 6. Кубическая парабола, гипербола, круг 238
§ 7. Изменение масштабов кривой 242
§ 8. Параметрическое задание кривой 250

Глава V. **Вытекание воды. Радиоактивный** распад и деление **ядер. Поглощение света** 252

§ 1. Вытекание воды из сосуда. Постановка задачи . . . 252
§ 2. Решение уравнения в случае, когда производная зависит от искомой функции 256
§ 3. Радиоактивный распад 259
§ 4. Измерение среднего времени жизни радиоактивных атомов 263
§ 5. Последовательный распад (радиоактивное семейство) 273
§ 6. Исследование решения для радиоактивного семейства 277
§ 7. Цепная реакция деления урана 283
§ 8. Размножение нейтронов в большой массе 285

§ 9. Вылет нейтронов 287
§ 10. Критическая масса 290
§ 11. Подкритическая и надкритическая масса при непрерывном источнике нейтронов 293
§ 12. Величина критической массы 296
§ 13. Поглощение света. Постановка задачи и грубая оценка 298
§ 14. Уравнение поглощения и его решение 300
§ 15. Соотношение между точным и грубым расчетами . . 301
§ 16. Эффективное сечение 303
§ 17. Ослабление потока заряженных частиц α- и β-лучей 304

Глава VI. **Механика** 308

§ 1. Сила, работа, мощность 308
§ 2. Энергия 317
§ 3. Равновесие и устойчивость 325
§ 4. Второй закон Ньютона 332
§ 5. Импульс силы 334
§ 6. Кинетическая энергия 340
§ 7. Движение под действием силы, зависящей только от скорости 346
§ 8. Движение под действием упругой силы 353
§ 9. Колебания 360
§ 10. Энергия колебаний. Затухающие колебания 367
§ 11. Вынужденные колебания и резонанс 372
§ 12. О точных и приближенных решениях физических задач 375
§ 13. Реактивное движение и формула К. Э. Циолковского 383
§ 14. Траектория снаряда 394
§ 15. Масса, центр тяжести и момент инерции стержня 399
§ 16. Колебания подвешенного стержня 407

Глава VII. **Тепловое движение молекул и распределение плотности воздуха в атмосфере** 410

§ 1. Условие равновесия в атмосфере 410
§ 2. Связь между плотностью и давлением 412
§ 3. Распределение плотности 414
§ 4. Молекулярно-кинетическая теория распределения плотности 417
§ 5. Броуновское движение и распределение молекул по кинетической энергии 422
§ 6. Скорости химических реакций 425
§ 7. Испарение. Ток эмиссии катода 427

Глава VIII. **Электрические цепи и колебательные явления в них** 432

§ 1. Основные понятия и единицы измерения 432
§ 2. Разряд емкости через сопротивление 442
§ 3. Колебания в цепи емкости с искровым промежутком 446

§ 4. Энергия конденсатора 450
§ 5. Цепь с индуктивностью 457
§ 6. Размыкание цепи с индуктивностью 461
§ 7. Энергия индуктивности 465
§ 8. Колебательный контур 471
§ 9. Затухающие колебания 476
§ 10. Случай большого сопротивления 480
§ 11. Переменный ток 483
§ 12. Средние величины, мощность и сдвиг фазы 488
§ 13. Колебательный контур в цепи переменного тока. Резонанс напряжений 491
§ 14. Параллельное включение индуктивности и емкости. Резонанс токов 495
§ 15. Ток смещения и электромагнитная теория света . . 498
§ 16. Нелинейное сопротивление и туннельный диод . . 499

Добавление. **Замечательная дельта-функция Дирака** . . . 504

§ 1. Различные способы определения функции 504
§ 2. Дирак и его функция 505
§ 3. Разрывные функции и их производные 508
§ 4. Представление дельта-функции формулами 511
§ 5. Применения дельта-функции 516

Заключение. **Что дальше?** 521

Ответы и решения 527

Приложение. **Латинский алфавит. Греческий алфавит** . . 560

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Уже в заглавии книги выражена задача — дать читателю первое представление о дифференциальном и интегральном исчислении и, применяя эти методы к важнейшим разделам физики, показать значение и силу высшей математики.

Понятия производной и интеграла не на много сложнее таких понятий, как «неизвестная величина» или «подобие треугольников», которые незыблемо входят в школьную программу. Давно пора сделать понятие производной и интеграла достоянием всякого культурного человека, чем бы он ни занимался.

Новые понятия вводятся в первой главе максимально просто и естественно. Дальше следует глава, посвященная технике вычислений в высшей математике. В третьей главе и в главах с пятой по восьмую идут применения к геометрии, к процессам ядерных превращений, механике, молекулярной физике, электричеству. Читателю, давно кончившему школу, будет полезна глава 4 о функциях и графиках. Добавление, напротив, выходит за рамки элементарного курса. Наконец, в Заключении очень схематично охарактеризованы более сложные задачи математической физики.

За годы, прошедшие после первого издания (1960 г.), отшумели дискуссии, в которых автора обвиняли в математической нестрогости и чуть ли не в развращении молодежи приблизительным, легкомысленным.

В сущности сталкивались два различных подхода к обучению.

Во многих учебниках изложеиие ведется в форме, напоминающей диспут двух ученых. Учащийся представляется как противник, выискивающий всевозможные возражения. Педагог последовательно, строго логически разбирает эти возражения одно за другим и неопровержимо доказывает правильность своих положений.

В предлагаемой книге учащийся рассматривается как друг и союзник, который готов поверить педагогу или учебнику и хочет применить к природе, к технике те математические приемы, которые ему предлагают. Понимание приходит в результате анализа примеров и применений. В строго логическом подходе вопрос о значении и пользе изучаемых теорем остается в тени. В предлагаемой книге на переднем плане показаны именно математические идеи и связь их с изучением природы.

Может быть, недостаточное внимание к строгим доказательствам есть проявление потребительного подхода к математике со стороны автора-физика? Мне кажется, что это не так; продвижение математики вперед совершается также с помощью интуиции, в терминах общих идей, попросту говоря — с помощью вдохновения, а не холодного расчета. Только потом работа облачается в броню формул и цепь строгих доказательств; в учебниках часто оказываются запрятанными, затушеванными идеи, вдохновлявшие творцов.

Восьмидесятилетний патриарх современной математики Рихард Курант писал в 1964 году, что очень долго математики принимали геометрию Евклида за образец строгого аксиоматического подхода, строгой логической дедукции (вывода). Но вот что пишет дальше Курант:

> «Упор на этот [аксиоматический, логический] аспект полностью дезориентирует того, кто предположит, что созидание, воображение, сопоставление и интуиция играют только вспомогательную роль в математическом творчестве и в настоящем понимании.

> В математическом образовании действительно дедуктивный способ, начинающий с догматических аксиом, позволяет быстрее обозреть большую территорию. Но конструктивный способ, идущий от частного к общему и избегающий догматического принуждения, надежнее ведет к самостоятельному творческому мышлению».

Итак, воображение и интуицию Курант ставит на первое место!

Пресловутое противопоставление лириков и физиков (а заодно и математиков) придумано поэтом Б. Слуцким, т. е. «лириком». В математике, как и в других естественных науках, больше поэзии, чем думают профессионалы-лирики. История науки показывает, что хорошая математика имеет пророческий дар: математический анализ известного открывает путь дальше, в новые неизвестные области, ведет к созданию новых физических понятий.

В «Высшей математике для начинающих» я стремился к конструктивному подходу, к выявлению смысла и цели математических понятий, стремился хотя бы отчасти передать дух того героического периода, когда эти понятия рождались.

После выхода 1-го издания в 1960 году появились переводы на болгарский и японский язык, готовится издание на французском.

В связи с тем, что книга рекомендована в качестве учебного пособия, данное — пятое — издание особенно тщательно переделано с педагогической точки зрения, произведены некоторые перестановки и сокращения. Полагаю, что книга может быть полезна не только учащимся и преподавателям математики, но и преподавателям физики в старших классах школы и на 1-м курсе втузов.

В конце книги приведены две дополнительные главы: «Замечательная дельта-функция Дирака» и «Что дальше?». Конечно эти главы не претендуют на педагогичность, они написаны в совсем ином стиле и дают только самое общее,

по необходимости поверхностное представление о более сложных вещах.

В 1965 и 1967 годах двумя изданиями вышла книга «Элементы прикладной математики», написанная совместно с А. Д. Мышкисом. Эту книгу можно рассматривать как продолжение «Высшей математики для начинающих», полезное для студентов 2-го курса. Наконец, в 1970 году также с А. Д. Мышкисом готовится первая часть «Математической физики».

В создании «Высшей математики для начинающих» на разных этапах целый ряд лиц оказал мне большую помощь, и я рад возможности выразить глубокую благодарность за это В. Л. Мануилову, К. А. Семендяеву, Н. А. Дмитриеву, Н. Н. Мейману, Р. С. Гутеру, Л. Я. Цлафу, Г. И. Баренблатту, К. Г. Цвангу, И. М. Яглому, Б. Я. Зельдовичу и читателям Е. Ф. Давыдову, П. П. Склярову, А. Г. Соколову. Надеюсь, что впредь внимательные читатели, заметившие ошибки или предлагающие улучшение книги, будут обращаться в издательство со своими замечаниями.

Август 1969 г.

Академик *Я. Б. Зельдович*

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛА

§ 1. Движение, путь и скорость

Рассмотрим поступательное движение тела вдоль некоторой прямой линии; расстояние определенной точки тела от определенной точки на этой прямой обозначим z, причем в одну сторону это расстояние будем считать положительным, а в другую — отрицательным. Пусть, например, прямая, вдоль которой движется тело, расположена вертикально, точки выше O соответствуют положительным z, точки ниже O — отрицательным z.

При движении координата z зависит от времени (мы будем сокращенно говорить: «координата z» вместо «расстояние определенной точки тела от определенной точки на прямой»). Движение тела определяется зависимостью z от времени t, т. е. заданием функции $z(t)$. Зная функцию $z(t)$, можно найти положение тела в любой момент времени.

Функцию $z(t)$ можно изобразить графически, откладывая по оси абсцисс время (ось t), а по оси ординат — величину z, характеризующую положение тела.

При равномерном движении с постоянной скоростью v путь s, пройденный за время t, равен произведению $s = vt$.

Обозначим z_0 координату тела в момент $t = 0$. Путь, пройденный за время t, равен разности $z(t) - z_0$. Значит,

$$z(t) = z_0 + vt. \qquad (1.1)$$

Следовательно, при равномерном движении зависимость координаты от времени дается линейной функцией. График зависимости $z(t)$ при равномерном движении представляет собой прямую линию на координатной плоскости, у кото-

рой по оси абсцисс (горизонтальной) отложено время t, а по оси ординат (вертикальной) отложена координата z.

При неравномерном движении зависимость $z(t)$ выражается более сложными формулами и соответствующий график представляет собой ту или иную кривую.

Разберем подробно следующую задачу: задана функция $z(t)$, т. е. зависимость координаты тела от времени, нужно найти скорость движения тела v. В общем случае неравномерного движения скорость не остается постоянной, она меняется с течением времени. Значит, скорость v есть также функция времени $v(t)$, и задача заключается в том, чтобы выразить $v(t)$ через известную функцию $z(t)$.

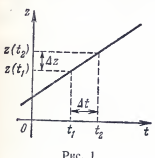


Рис. 1.

В частном случае равномерного движения (с постоянной скоростью) все просто. Скорость определяется как путь, пройденный за единицу времени. Так как скорость постоянна, то безразлично, какой именно участок пути и какой промежуток времени выбран для определения скорости.

Найдем путь, пройденный за одну секунду от момента t_1 *сек* до момента t_1+1 *сек*. Этот путь равен разности координат $z(t_1+1)$ и $z(t_1)$:

$$z(t_1+1)-z(t_1)=[z_0+v\cdot(t_1+1)]-[z_0+vt_1]=v$$

и численно оказался равным скорости. Можно взять произвольный промежуток времени между t_1 и t_2 и разделить пройденный путь z_2-z_1 на величину промежутка t_2-t_1:

$$\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}=\frac{(z_0+vt_2)-(z_0+vt_1)}{t_2-t_1}=v. \qquad (1.2)$$

Именно потому, что скорость постоянна, мы могли выбирать для ее вычисления любой интервал t_2-t_1, и ответ не зависел ни от момента t_1, ни от величины этого интервала. В общем случае движения с переменной скоростью это уже не так.

Прежде чем переходить к более общему случаю, удобно переменить обозначения. Назовем $t_1=t$, $t_2=t+\Delta t$, так что

разность $t_2 - t_1$, т. е. промежуток времени, обозначена Δt (рис. 1). Подобно этому обозначим Δz разность

$$z(t_2) - z(t_1) = z(t + \Delta t) - z(t) = \Delta z.$$

В этих обозначениях средняя скорость $v_{ср}$ в интервале Δt от t до $t + \Delta t$ равна *)

$$v_{ср} = \frac{\Delta z}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Мы говорим здесь о средней скорости потому, что в общем случае сама скорость может меняться на протяжении интервала Δt.

Рассмотрим второй пример, когда $z(t)$ задается формулой

$$z(t) = z_0 + bt + ct^2. \qquad (1.4)$$

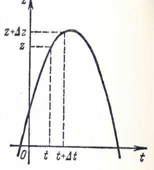


Рис. 2.

На рис. 2 приведен один из возможных графиков, отвечающих функции вида (1.4). Вычислим среднюю скорость $v_{ср}$ на интервале Δt по формуле (1.3). Для этого запишем

$$z(t) = z_0 + bt + ct^2;$$
$$z(t + \Delta t) = z_0 + b(t + \Delta t) + c(t + \Delta t)^2;$$
$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t) = b\Delta t + 2ct\Delta t + c(\Delta t)^2.$$

Отсюда получается

$$v_{ср} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = b + 2ct + c\Delta t. \qquad (1.5)$$

Сравним результаты (1.2) и (1.5) для средней скорости при движении по закону (1.1) и по закону (1.4). Второй пример отличается тем, что в нем средняя скорость зависит и от самого момента t, и от промежутка времени Δt.

Как же найти мгновенную скорость?

---

*) Отметим, что Δ — это не множитель, а знак, заменяющий слово «приращение», так что сокращать Δ в числителе и знаменателе дроби нельзя. Сам знак Δ — это прописная буква «дельта» греческого алфавита, так что Δt читается «дельта тэ», Δz — «дельта зет»; часто читают Δt — «приращение времени», Δz — «приращение пути».

Скорость меняется постепенно, поэтому чем меньше промежуток времени, в течение которого производится измерение пройденного пути, тем меньше успеет измениться скорость, тем ближе будет средняя скорость к ее мгновенному значению.

В формуле (1.5) $v_{\text{ср}}$ содержит два члена, не зависящих от величины промежутка Δt, и один член, пропорциональный Δt.

При очень маленьких Δt этим членом можно пренебречь, а $v_{\text{ср}}$ при этом дает величину мгновенной скорости

$$v_{\text{мгн}} = b + 2ct. \tag{1.6}$$

Внимательный читатель, вероятно, уже узнал в выражениях (1.4) и (1.6) известные из школьного учебника физики формулы для равноускоренного движения:

$$\left.\begin{aligned} z(t) &= z_0 + v_0 t + \frac{at}{2}, \\ v(t) &= v_0 + at. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Для этого нужно лишь вместо b подставить v_0 — начальную скорость (т. е. скорость в момент $t = 0$), а вместо c подставить $a/2$, где a — ускорение.

Мы вычислили мгновенную скорость в момент t, исходя из средней скорости в промежутке от t до $t + \Delta t$. Попробуем теперь вычислить ее, выбирая промежуток несколько по-иному. Найдем среднюю скорость в промежутке от $t_1 = t - 3\Delta t/4$ до $t_2 = t + \Delta t/4$; длительность промежутка по-прежнему равна $t_2 - t_1 = \Delta t$. Из формулы (1.4) получим

$$z(t_1) = z_0 + b\left(t - \frac{3\Delta t}{4}\right) + c\left(t - \frac{3\Delta t}{4}\right)^2,$$

$$z(t_2) = z_0 + b\left(t + \frac{\Delta t}{4}\right) + c\left(t + \frac{\Delta t}{4}\right)^2,$$

$$z(t_2) - z(t_1) = b\Delta t + 2ct\,\Delta t - \frac{1}{2}c(\Delta t)^2.$$

Отсюда следует, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{\Delta t} = b + 2ct - \frac{1}{2}c\Delta t. \tag{1.8}$$

Если сравнить формулы (1.5) и (1.8), то видно, что средние скорости на интервале от t до Δt и на интервале от $t - 3\Delta t/4$

до $t+\Delta t/4$ отличаются на величину $c\Delta t\,[1-(-1/2)]=3c\Delta t/2$. Но если мы хотим найти мгновенную скорость, то нужно брать очень маленький интервал Δt; при этом различие пропадает, и мы снова получаем для мгновенной скорости $v_{\text{мгн}}=b+2ct$.

Мы рассмотрели понятие мгновенной скорости для двух конкретных примеров: для равномерного и для равноускоренного движения. В следующем параграфе мы дадим более точное определение мгновенной скорости при произвольном законе движения.

§ 2. Производная функции — предел отношения приращений

В предыдущем параграфе в связи с задачей о мгновенной скорости мы пришли к рассмотрению отношений вида

$$\frac{z(t_2)-z(t_1)}{t_2-t_1}$$

при очень близких между собой значениях t_2 и t_1.

Выражение «очень близкие» является неопределенным, нестрогим. Точная формулировка такова: необходимо найти *предел*, к которому стремится отношение

$$\frac{z(t_2)-z(t_1)}{t_2-t_1} \tag{2.1}$$

при t_2, стремящемся к t_1. Используя обозначения Δt и Δz, это отношение можно переписать в виде

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta z}{\Delta t}\,. \tag{2.2}$$

В формуле (2.2) величины Δt и Δz зависимы: можно выбрать любой промежуток времени Δt, но после того, как промежуток времени Δt, стоящий в знаменателе, выбран, подразумевается, что Δz в числителе не любой отрезок пути, а именно тот, который соответствует промежутку времени Δt. В формуле (2.1) это было очевидно из самого написания аргументов функции $z(t_2)$, $z(t_1)$ в числителе, формула (2.2) есть просто другая запись формулы (2.1).

Интересующая нас величина мгновенной скорости $v(t)$ в момент t есть предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ при Δt, стремящемся

к нулю. Очевидно, стремление Δt к нулю равносильно стремлению t_2 к t_1, поскольку $\Delta t = t_2 - t_1$. Приведенная формулировка записывается так:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right).$$

Буквы lim (начальные буквы латинского слова limes — лимес — предел) обозначают «предел»; внизу записано, о каком именно пределе идет речь — при Δt, стремящемся к нулю, стрелка заменяет слово «стремится», в скобках указана та величина $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, предел которой ищется.

Что значит «предел», «стремление к пределу»? Те расчеты, которые мы производили в предыдущем параграфе, как раз и служили наглядным пояснением этих понятий. Мы видели, что при малых промежутках Δt величина $v_{ср}$ во втором примере отличалась от значения $v_{мгн}$ на малую величину, пропорциональную Δt. Хотя коэффициент пропорциональности при Δt мог быть различным при разных способах выбора интервала, для малых значений Δt в выражении для $v_{ср}$ мы всегда могли пренебречь членом $c\,\Delta t$.

Итак, отношение

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1}$$

стремится к определенному пределу, когда $\Delta t = t_2 - t_1$ стремится к нулю; при Δt, стремящемся к нулю, t_2 и t_1 неограниченно сближаются между собой, и общую их величину мы обозначаем (когда $\Delta t \to 0$) $t_2 = t_1 = t$.

Предел отношения, т. е. мгновенная скорость v, есть определенная функция t,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = v(t).$$

Почему при вычислении скорости по заданной формуле $z(t)$ приходится проводить такой длинный расчет, находить Δz для различных Δt и затем только находить предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$? Нельзя ли сразу взять значение $\Delta t = 0$? При этом мы получили бы $\Delta z = 0$, так как $\Delta t = t_2 - t_1$, и если $t_2 = t_1$, то и $z(t_2) = z(t_1)$ и $\Delta z = z(t_2) - z(t_1) = 0$. Значит, при таком

бездумном способе действий мы получили бы $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{0}{0}$, т. е. не получили бы никакого определенного ответа.

При вычислении скорости вся суть заключается в том, чтобы брать малые Δt и *соответствующие им* малые Δz. При этом получается каждый раз вполне определенное отношение $\frac{\Delta z}{\Delta t}$; когда Δt уменьшается, стремится к нулю, то Δz уменьшается приблизительно пропорционально величине Δt, а поэтому отношение остается приблизительно постоянным.

Отношение $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ стремится к определенному пределу при стремлении Δt к нулю.

Величина этого предела — *мгновенная скорость* $v(t)$ в случае движения или в общем случае *производная* функции $z(t)$ — зависит от вида функции $z(t)$ и от значения переменной t. В следующем параграфе мы проведем алгебраически вычисление производной нескольких простейших функций и для них найдем точное значение предела, т. е. производной.

§ 3. Обозначения производной. Производная степенной функции

Предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении к нулю приращения независимой переменной имеет первостепенное значение и для высшей математики и для ее приложений: выше мы видели, например, что такое важнейшее понятие, как мгновенная скорость движения, находится именно с помощью предела такого отношения. Поэтому предел этого отношения имеет специальное название: «производная функции» или, короче, «производная». Первое название связано с тем, что если z есть функция t, $z(t)$, то и предел отношения $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = v$ также есть функция (другая) $v(t)$ переменной t — зависит от значения t, к которому стремятся t_1 и t_2, или, как иначе говорят, v зависит от значения t, «при котором берется производная z».

Для производной имеются специальные обозначения.

Один способ обозначения

$$\frac{dz}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

При этом величина $\frac{dz}{dt}$ (читается: «де — зет по де — тэ») рассматривается не как дробь, а просто как сокращенная запись предела, стоящего справа. Величина $\frac{dz}{dt}$ записана в форме дроби для того, чтобы напоминать, что эта величина получена из дроби $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ путем перехода к пределу.

Другое обозначение производной — с помощью штриха, $v=z'(t)$, или, например, для функции $y(x)$

$$y'=y'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В механике иногда производные по времени обозначают точкой сверху, $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$, но мы такими обозначениями пользоваться не будем.

Иногда вместо знака функции подставляют ее выражение: так, например, если $z=at^2+b$, то можно писать вместо $\frac{dz}{dt}$ прямо $\frac{d(at^2+b)}{dt}$ или $(at^2+b)'$.

Найдем алгебраически производную от функции

$$z=t^2.$$

Для этого составим отношение

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{(t+\Delta t)^2-t^2}{\Delta t}.$$

Раскроем в числителе скобки:

$$(t+\Delta t)^2-t^2=t^2+2t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2-t^2=2t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{2t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=2t+\Delta t.$$

Теперь легко найти предел: очевидно, что если величина представляет собой сумму слагаемого, не зависящего от Δt (в данном случае $2t$), и самого Δt, то при стремлении Δt

к нулю останется просто слагаемое, не зависящее от Δt:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d(t^2)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)=2t.$$

Рассмотрим еще пример:

$$z=t^3,$$
$$\Delta z=(t+\Delta t)^3-t^3=t^3+3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3-t^3,$$
$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=3t^2+3t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2,$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{d(t^3)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}[3t^2+3t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2]=3t^2.$$

В этих примерах предел можно было легко найти, так как при вычислении отношения $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ величина Δt сокращалась. Рассмотрим более сложный пример:

$$z=\frac{1}{t}; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{t+\Delta t}-\frac{1}{t}}{\Delta t}.$$

Можно ли пренебречь величиной Δt в первой дроби, в выражении $\frac{1}{t+\Delta t}$, когда мы перейдем к пределу? Нет, потому что еще не проведено сокращение с величиной Δt в знаменателе. Заменяя $\frac{1}{t+\Delta t}$ на $\frac{1}{t}$ при малом Δt, мы совершаем малую ошибку в одном из слагаемых числителя дроби $\frac{\Delta z}{\Delta t}$. Однако у этой дроби малы и числитель и знаменатель, если мало Δt. Поэтому малая ошибка в числителе недопустима.

Покажем правильный способ действия:

$$\Delta z=\frac{1}{t+\Delta t}-\frac{1}{t}=\frac{t-(t+\Delta t)}{t(t+\Delta t)}=-\frac{\Delta t}{t(t+\Delta t)},$$
$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=-\frac{1}{t(t+\Delta t)}.$$

Теперь можно найти предел (производную), опуская Δt

в знаменателе,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[-\frac{1}{t(t+\Delta t)}\right]=-\frac{1}{t^2}.$$

На этих примерах можно увидеть очень важное, *основное свойство предела*. При уменьшении величины Δt разность между значением отношения $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ и пределом этого отношения (равным производной) $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz}{dt}$ можно сделать, как говорится, «сколь угодно малой», т. е. меньше любого заданного числа.

Поясним это примером. Для $z=\frac{1}{t}$,

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{t^2}, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t}=-\frac{1}{t(t+\Delta t)}.$$

Возьмем, например, $t=2$, $\frac{dz}{dt}=-0{,}25$. Можно ли выбрать такое Δt, чтобы $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ отличалось от своего предела меньше чем на 0,0025? Это значит, что Δt нужно выбрать так, чтобы $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ лежало в пределах между $-0{,}25+0{,}0025=$ $=-0{,}2475$ и $-025-0{,}0025=-0{,}2525$. Подставляя выражение $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ при $t=2$, найдем, что Δt должно быть по абсолютной величине меньше 0,02.

Точно так же обстоит дело и для других функций: стремление к пределу при $\Delta t\to 0$ означает возможность выбора Δt, при котором достигается любая степень приближения к пределу.

Особенно просто находится производная в частном случае $z=t$: очевидно, при этом $\Delta z=\Delta t$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}=1$ — отношение равно 1 для любых (больших и малых) Δt, а значит, и в пределе. Итак,

$$z=t; \quad \frac{dz}{dt}=\frac{dt}{dt}=1.$$

Наконец, постоянную величину $z=C$ тоже можно рассматривать как частный случай функции, но в этом случае,

очевидно, $\Delta z = 0$ при любых Δt, следовательно, имеет место

$$z = C; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0.$$

Если функцию умножить на постоянный множитель, то на такой же множитель умножится и ее производная, например

$$z = 3t^2; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d(3t^2)}{dt} = 3 \cdot \frac{dt^2}{dt} = 3 \cdot 2t = 6t.$$

В общем виде, если

$$z(t) = a \cdot y(t), \quad \text{то} \quad \frac{dz}{dt} = a \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Очевидно также, что производная суммы двух функций равна сумме производных этих двух функций:

$$z(t) = x(t) + y(t); \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Используя оба эти правила, получим, что производная суммы нескольких функций, взятых с постоянными (но, вообще говоря, различными) коэффициентами, равна сумме производных этих функций с теми же коэффициентами:

$$z(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c \cdot u(t),$$

$$\frac{dz}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{du}{dt}.$$

Каждое из этих правил легко доказать, составляя $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$; эти правила, которые справедливы для $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ при любом Δt, справедливы и для предела, т. е. для $\frac{dz}{dt}$.

Теперь легко найти производную от многочлена. Предварительно выпишем рядом все найденные выше производные:

$$\frac{dC}{dt} = 0; \quad \frac{dt}{dt} = 1; \quad \frac{d(t^2)}{dt} = 2t; \quad \frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2.$$

В § 1 мы рассматривали

$$z(t) = z_0 + bt + ct^2.$$

Найдем:

$$v(t)=\frac{dz}{dt}=\frac{dz_0}{dt}+b\frac{dt}{dt}+c\frac{dt^2}{dt}=0+b\cdot 1+c\cdot 2t=b+2ct.$$

Это и есть та формула для мгновенной скорости, которую мы там получили.

Техника нахождения производных (или, как говорят иначе, *дифференцирования функций*) подробно изложена в начале следующей главы.

Забегая вперед, можно отметить, что дифференцирование функций, заданных формулами, оказывается сравнительно простым и легким делом, более легким, например, чем решение алгебраических уравнений. Формулы для производных никогда не получаются более сложными (более сложного типа), чем формулы для самих функций; так, например, если функция является многочленом

$$y=a+bx+cx^2+lx^3+fx^4,$$

то производная ее тоже является многочленом

$$\frac{dy}{dx}=b+2cx+3lx^2+4fx^3$$

(это относится к многочленам любой степени). Если функция является алгебраической дробью, то и производная является дробью. Если функция содержит корни или дробные степени, то и производная содержит их. Производные от тригонометрических функций также являются тригонометрическими функциями. А в некоторых случаях, например для логарифмической функции, производная оказывается функцией даже более простого типа (в данном случае алгебраической дробью).

Для нахождения производных не надо остроумия или выдумки, задача всегда решается аккуратным, последовательным применением простых правил, которые будут изложены в главе II.

Производные различных более сложных функций рассматриваются в следующей главе книги.

Все функции, которые мы рассматривали до сих пор, задавались формулами. Не следует думать, что это обязательно для того, чтобы существовала производная. Например, мы можем считать зависимость пути от времени

известной из опыта, в виде очень подробных таблиц. Ясно, что с помощью этих таблиц можно вычислять мгновенную скорость (т. е. производную) по тем же самым правилам, по которым мы делали это для функций, заданных формулами.

Ввиду важности данного параграфа повторим основные выводы.

1) Производная функция определяется как предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении к нулю приращения независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

2) Мгновенная скорость движения тела равна производной координаты тела по времени. По аналогии говорят, что производная $\frac{dy}{dx}$ дает скорость изменения функции y при изменении переменной (аргумента) x и в тех случаях, когда x не является временем, а y не является координатой.

Упражнения

1. Найти алгебраически производную функций: а) $z=t^2$ и б) $z=t^3$, задаваясь $t_1=t-\frac{\Delta t}{2}$, $t_2=t+\frac{\Delta t}{2}$; при этом момент t, для которого находится производная, при любом t лежит в середине промежутка времени от t_1 до t_2.

Найти производные для функций:

2. $y=x^4$. 3. $y=(x+1)^2$. 4. $y=\frac{1}{x^2}$. 5. $y=a+\frac{b}{x^2}$. 6. $y=\sqrt{x}$.

Указание к задаче 6. Умножить числитель и знаменатель выражения

$$\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \text{ на сумму } \sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}.$$

§ 4. Приближенное вычисление значений функции с помощью производной

Производная $\frac{dz}{dt}$ определяется как предел отношения приращений $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$. При Δt не равном нулю отношение приращений $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ не равно производной $\frac{dz}{dt}$, но это

отношение приближенно равно $\frac{dz}{dt}$ и приближение тем лучше, чем меньше Δt.

Поэтому приближенно напишем*):

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \approx \frac{dz}{dt} = z'(t); \quad \Delta z \approx \frac{dz}{dt} \cdot \Delta t = z'(t)\,\Delta t. \qquad (4.1)$$

Отсюда найдем и приближенное значение функции $z(t+\Delta t)$

$$z(t+\Delta t) = z(t) + \Delta z \approx z(t) + \frac{dz}{dt} \cdot \Delta t = z(t) + z'(t)\,\Delta t. \quad (4.2)$$

Обратите внимание на то, что в формуле (4.2) первый знак равенства точный по определению Δz, второй — приближенный.

Вернемся к обозначениям $t_2 = t + \Delta t$, $t_1 = t$, которыми мы пользовались раньше. Получим:

$$z(t_2) \approx z(t_1) + z'(t_1) \cdot (t_2 - t_1). \qquad (4.3)$$

Таким образом, при малой разности $t_2 - t_1$, т. е. при t_2 близком к t_1, функция $z(t_2)$ может быть выражена приближенной формулой, в которую входят значение функции $z(t)$ и ее производной $z'(t)$ при $t = t_1$. Отметим, что в эту формулу t_2 входит в первой степени или, как говорят еще, линейно.

Приведем пример. Пусть $z = t^3$ и нас интересуют значения z при t близком к 1. Выберем $t_1 = 1$, тогда $z(t_1) = t_1^3 = 1$, $z'(t_1) = 3t_1^2 = 3$ и приближенная формула имеет вид

$$z(t_2) = t_2^3 \approx 1 + 3(t_2 - 1) = 3t_2 - 2.$$

---

*) Утверждение, что приближенное равенство

$$\Delta z = z(x+\Delta x) - z(x) \approx z'(x)\,\Delta x$$

становится точным в пределе при $\Delta x \to 0$, нуждается в разъяснении. При $\Delta x \to 0$, очевидно, и $\Delta z \to 0$. Поэтому приближенное равенство $\Delta z \approx a \cdot \Delta x$ при $\Delta x \to 0$ становится точным при любом a, так как это равенство даст $0 = 0$. Но мы утверждаем больше: при конечном Δx из $\Delta z \approx z'(x)\,\Delta x$ следует, что $\frac{\Delta z}{\Delta x} \approx z'(x)$. Мы утверждаем, что и это следствие из приближенного равенства $\Delta z \approx z'(x)\,\Delta x$ тоже становится точным в пределе при $\Delta x \to 0$. Это следует из определения производной $z'(x)$.

Сравним точное и приближенное выражения (табл. 1).

Таблица 1

t_2	1	1,01	1,02	1,05	1,1	1,5	2
t_2^3	1	1,0303	1,0612	1,1576	1,3310	3,375	8
$3t_2-2$	1	1,03	1,06	1,15	1,30	2,50	4,0

Приведем еще пример $z=\sqrt{t}$. Найдем значения функции при t близком к 4. В этом случае $z(4)=\sqrt{4}=2$. Производная $z'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ (см. упражнение 6 к § 3). Поэтому $z'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ и приближенная формула имеет вид

$$z(t_2)=\sqrt{t_2}\approx 2+0,25\,(t_2-4)=1+0,25t_2.$$

Сравним и в этом случае приближенное и точное выражения (табл. 2).

Таблица 2

t_2	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{t_2}$	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3
$1+0,25t_2$	2	2,25	2,50	2,75	3,0	3,25

Представим себе, что Δt есть промежуток времени, $z'(t)$ — мгновенная скорость, Δz — приращение пути, т. е. путь, пройденный за время Δt. Формула

$$\Delta z=z'(t)\,\Delta t \tag{4.4}$$

означает, что путь равен произведению мгновенной скорости на промежуток времени. Но ведь мгновенная скорость сама меняется со временем. Поэтому (4.4) верно лишь в том

случае, когда мгновенная скорость не успела заметно измениться за время Δt. Следовательно, чем быстрее меняется величина $z'(t)$, тем меньше Δt можно брать в формуле (4.4). И наоборот, чем медленнее меняется $z'(t)$, тем больше можно брать Δt, т. е. величина приращения Δt, для которого формула (4.4) дает еще малую ошибку, зависит от скорости изменения производной на промежутке Δt.

Рассмотренные примеры подтверждают этот вывод. В первом примере при изменении t от 1 до 2 $(\Delta t = 1)$ производная $z'(t) = 3t^2$ изменяется от 3 до 12 (т. е. в 4 раза). Во втором примере при изменении t от 4 до 9 производная $z'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ изменяется от 0,25 до 0,167 (т. е. примерно на 30%). Поэтому во втором случае формула дает хороший результат при бо́льших значениях Δt. Подробно вопрос о границах применения формулы (при заданной требуемой точности) и о возможности ее уточнения разобран в последних параграфах второй главы.

Все сказанное в равной мере относится и к положительным и к отрицательным приращениям; пример с отрицательными приращениями дан в упражнениях.

Упражнения

1. Найти $(1,2)^2$, $(1,1)^2$, $(1,05)^2$, $(1,01)^2$, пользуясь формулой (4.3). Сравнить полученные результаты с точными.

2. Для функции $z(t) = 2 + 20t - 5t^2$ найти при помощи производной $z(1,1)$, $z(1,05)$, $z(0,98)$. Сравнить с точными значениями.

Указание. В последнем случае взять $t = 1$, $\Delta t = -0,02$.

§ 5. Касательная к кривой

С помощью производной можно решить важную задачу аналитической геометрии — задачу о нахождении касательной к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$. Координаты точки касания A считаются заданными: $x = x_0$, $y = y_0 = f(x_0)$.

Найти касательную — это значит найти ее уравнение. Очевидно, что уравнение касательной — это уравнение прямой, проходящей через точку касания. Уравнение любой прямой, проходящей через заданную точку $A(x_0, y_0)$, можно написать в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Для того чтобы найти уравнение касательной, остается определить величину k — угловой коэффициент касательной (ее «крутизну»). Для этого сперва найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки A, B рассматриваемой кривой (рис. 3); такую прямую называют секущей. Когда эти две точки кривой сближаются, то прямая приближается к касательной. На рис. 3 показаны две секущие через точки A и B и через A и B', причем B' лежит ближе к A по сравнению с B.

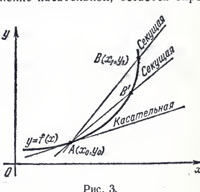


Рис. 3.

Чем ближе вторая точка к точке A, тем ближе секущая к касательной. Поэтому угловой коэффициент касательной равен пределу, к которому стремится угловой коэффициент секущей при стремлении к нулю расстояния между двумя точками пересечения секущей с кривой.

Рис. 4.

Угловой коэффициент секущей легко выразить через значения функции в точках пересечения.

Возьмем в качестве одной из точек пересечения секущей с кривой точку $A(x_0, y_0)$, в которой мы хотим провести касательную к кривой, координаты второй точки пересечения B обозначим x_1, y_1.

Так как эти точки лежат на кривой, уравнение которой есть $y=f(x)$, то $y_0=f(x_0)$ и $y_1=f(x_1)$. Как видно из рис. 4, угловой коэффициент секущей k_c равен

$$k_c = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Выражение углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки, рассматривается в §§ 3 и 4 главы IV.

Чтобы получить угловой коэффициент *касательной* в точке $x=x_0$, нужно брать точку B все ближе к A, т. е. нужно, чтобы x_1 стремилось к x_0. Следовательно, угловой коэффициент касательной k равен пределу k_c при x_1, стремящемуся к x_0:

$$k=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Обозначим Δx разность x_1-x_0, $x_1=x_0+\Delta x$ и соответственно

$$\Delta f=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

В этих обозначениях угловые коэффициенты секущей k_c и касательной k выразятся формулами

$$k_c=\frac{\Delta f}{\Delta x},\quad k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Следовательно, угловой коэффициент касательной есть *производная* функции $f(x)$

$$k=\frac{df}{dx}=f'(x_0).$$

Мы знаем, что производная функции $f(x)$ сама является функцией x. Так как мы искали угловой коэффициент касательной в точке $A(x_0, y_0)$, то при вычислении предела $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ мы считали закрепленным значение $x=x_0$. Поэтому в окончательной формуле и стоит $f'(x_0)$, значение производной при $x=x_0$.

Рассмотрим пример параболы, $y=x^2$, т. е. $f(x)=x^2$. Составим уравнение касательной в точке $x_0=2$, $y_0=f(x_0)=4$.

Мы знаем производную

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{dx^2}{dx}=2x.$$

Следовательно, в интересующей нас точке угловой коэффициент касательной

$$k=f'(x_0)=2x_0=4.$$

Уравнение касательной

$$y-y_0=k(x-x_0),\quad y-4=4(x-2),\quad y=4x-4.$$

Без помощи производных трудно провести касательную к кривой, заданной уравнением $y=f(x)$: нужно вычислить большое число точек кривой, с помощью лекала провести кривую по этим точкам и потом на глаз приставлять линейку к кривой в заданной точке, внимательно следя за тем, чтобы не пересечь кривую вблизи точки касания. С помощью производных мы находим уравнение касательной, по этому уравнению находим две точки, лежащие на прямой, заданной этим уравнением, и проводим прямую (касательную) с помощью линейки по этим двум точкам. В качестве одной точки естественно взять саму точку касания $A(x_0, y_0)$, вторую точку C на прямой можно взять далеко от A, тогда с большой точностью определится наклон и положение касательной как прямой, проходящей через две точки A и C.

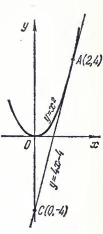


Рис. 5.

Так, например, выше мы нашли уравнение прямой, касающейся параболы $y=x^2$ в точке $x_0=2, y_0=4$. Это уравнение имеет вид $y=4x-4$. Найдем координаты двух точек на этой прямой: при $x=2$ найдем $y=4\cdot 2-4=4$; это есть сама точка касания $A(2,4)$, ее координаты можно было и не вычислять, касательная обязана пройти через нее. В качестве второй точки (C) выберем точку пересечения касательной с осью y: положим $x=0$, найдем $y=-4$, так что $C(0, -4)$ (рис. 5).

Отметим любопытное обстоятельство: при $x=0$, $y=-y_0$ точка C пересечения касательной с осью y лежит ниже оси x на столько же, на сколько сама точка касания лежит выше оси x. Это не случайно, такое правило справедливо для всех касательных к квадратичным параболам с уравнением $y=ax^2$. В самом деле, если касательная проведена в точке $A(x_0, y_0=ax_0^2)$, то ее уравнение есть

$$y-y_0=2ax_0(x-x_0),$$

и при $x=0$ получаем:

$$y-y_0=-2ax_0^2, \quad y=y_0-2ax_0^2=y_0-2y_0=-y_0.$$

Таким образом, касательная проходит через точки $A(x_0, y_0=ax_0^2)$ и $C(0, y=-y_0=-ax_0^2)$.

При построении кривой по точкам трудно точно провести кривую, если вычислено мало точек. С помощью производных можно заранее провести касательные к кривой в этих точках; после этого легче и точнее можно провести саму кривую.

Наглядно ясно, что в точках максимума и минимума кривой касательная горизонтальна. Уравнение горизонтальной

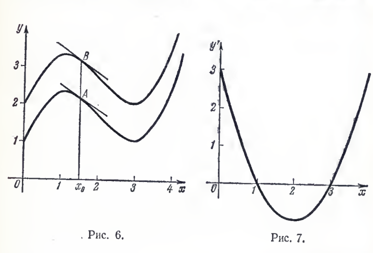


Рис. 6. Рис. 7.

прямой $y = \text{const}$, угловой коэффициент горизонтальной прямой $k = 0$. В точках максимума и минимума кривой, следовательно, равна нулю производная функции $y = f(x)$, графиком которой является кривая (подробно об этом в следующем параграфе). Таким образом, с помощью условия $f'(x) = 0$ можно находить координату x точек минимумов и максимумов кривой; координату y при этом легко найти, подставляя x в уравнение кривой. Очевидно, что, зная координаты точек максимума и минимума, можно точнее провести саму кривую.

Полезно в порядке упражнения, нарисовав от руки кривую $y(x)$, хотя бы приблизительно, но быстро провести кривую $y'(x)$, обращая внимание на знак $y'(x)$ и на точки, где $y'(x)$ обращается в нуль. Такой пример показан на рис. 6 (график $y(x)$) и 7 (график производной $y'(x)$).

Точки обращения в нуль самой функции $y(x)$ для производной $y'(x)$ ничем не замечательны. Если кривую $y(x)$ поднять параллельно самой себе (верхняя кривая, рис. 6, a), то кривая $y'(x)$ от этого никак не изменится: при параллельном переносе все наклоны остаются одинаковыми, например, при $x = x_0$ касательные к кривой $y(x)$ (точка A) и к смещенной кривой (точка B) параллельны, углы одинаковы. Этот результат соответствует свойству производных: прибавление константы к функции (соответствующее параллельному переносу по вертикали на графике) не меняет производной.

Можно заниматься и другой математической игрой: нарисовав от руки график производной, приблизительно построить график функции. При этом нужно произвольно задать одну точку $(x_0, y(x_0))$ и от нее вести кривую вверх или вниз (в соответствии со знаком производной).

В заключение заметим, что до сих пор предполагалось равенство масштабов по оси y и по оси x, т. е. что одна единица измерения x и одна единица измерения y выражаются на графике отрезками равной длины. Тогда действительно $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$.

При построении графиков часто пользуются разными масштабами, в особенности когда y и x суть величины разной размерности. Пусть, например, y есть путь, а x — время и откладывается график положения тела в зависимости от времени $y(x)$. По оси ординат (y) будем откладывать y в масштабе 1 *м* пути = 1 *см* на чертеже. По оси абсцисс (x) будем откладывать время в масштабе 1 *сек* времени = 1 *см* на чертеже. Тогда действительно скорость движения v, выраженная в метрах в секунду и равная производной $\frac{dy}{dx}$, равна $\operatorname{tg} \alpha$, тангенсу угла касательной на графике. Но если мы выберем другой масштаб для шкалы x, например 1 *сек* = l *см* = 5 *см* на чертеже, то получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{l\,dx} = \frac{1}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} v \, \frac{\text{м}}{\text{сек}} .$$

В общем случае, если одна единица x на чертеже откладывается в масштабе l *см*, а одна единица y отклады-

вается в масштабе n *см*, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{l}\frac{dy}{dx}.$$

Когда y и x — именованные (размерные) величины, например, y — метры, x — секунды или y — килограммы, x — месяцы (зависимость веса ребенка от времени), производная $\frac{dy}{dx}$ тоже имеет размерность: в первом случае $\frac{dy}{dx} = v$ — это скорость движения, размерность $\frac{м}{сек}$, во втором случае $\frac{dy}{dx}$ — это скорость увеличения веса, *кг/месяц*.

Тригонометрическая функция $\operatorname{tg}\alpha$ безразмерна (она равна отношению длин двух отрезков). Поэтому и не может быть простого равенства $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, так как в нем левая часть и правая часть имеют разные размерности. Масштабные множители l и n в формуле $\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{l}\cdot\frac{dy}{dx}$ как раз и делают равенство правильным с точки зрения размерности. Так, во втором примере l имеет размерность *см/месяц* (1 *см* на графике на 1 месяц возраста), n имеет размерность *см/кг* (1 *см* на графике на 1 *кг* веса), так что $\frac{n}{l}\cdot\frac{dy}{dx}$ безразмерно. В формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n\left(\frac{см}{кг}\right)}{l\left(\frac{см}{месяц}\right)}\frac{dy}{dx}\left(\frac{кг}{месяц}\right)$$

все размерности сокращаются.

Об этом следует помнить при сравнении производной и наклона кривой.

Упражнения

1. Построить график $y = x^2 + 1$ в пределах от $x = -1{,}5$ до $x = 2{,}5$ и провести к нему касательные в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

2. То же для функции $y = x^3 - 3x^2$, $-1 < x < 3{,}5$, касательные при $x = -1$, 0, 3. Найти точки с горизонтальной касательной.

3. Найти точки с горизонтальной касательной для кривой $y = x^3 - x + 1$. Построить кривую при $-2 < x < 2$.

Указание. Упражнения 1—3 желательно выполнять на миллиметровке в крупном масштабе.

4. Построить кривую $y'(x)$ для функции $y(x)$, заданной рис. 8.

Указание. Сперва перерисовать рис. 8 на чистый лист и там же строить $y'(x)$, чтобы не лишать удовольствия следующего читателя.

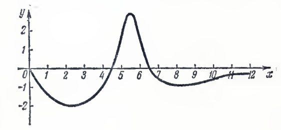


Рис. 8.

5. Провести кривую $y(x)$ через точку $x=5$, $y=0$ для кривой $y'(x)$, заданной рис. 9. Под каким углом $y(x)$ пересекает ось ординат? Под каким углом $y(x)$ пересекает ось абсцисс при $x=5$?

Указание. То же, что и к упражнению 4.

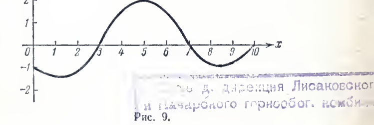


Рис. 9.

6. Составить уравнения касательных к кривой $y=x^3$ в точках $x=0{,}5$ и $x=1$. Найти точки пересечения касательных с осями x и y.

7. Найти общее правило для точек пересечения с осями касательных к кривым $y=ax^2$, $y=bx^3$.

§ 6. Рост и убывание, максимум и минимум функций

Пусть нам задана зависимость какой-нибудь физической величины, например температуры, от времени.

Итак, z — это температура, t — время, и дана формула для функции $z(t)$. Как определить, растет или падает

температура в данный момент t? Как определить, в какой момент температура достигает максимума или минимума?

Не зная производных, ответ на первый вопрос нужно искать численно: найти температуру в данный момент t, затем взять какой-то следующий момент t_1 и посмотреть, выросла температура или упала? Очевидно, что такой способ ненадежен: если $z(t_1)$ и больше чем $z(t)$, то ведь не исключено, что в момент t температура падала, вскоре (после t, но до t_1) достигла минимума, а уже после этого стала расти и к моменту t_1 стала выше $z(t)$.

С помощью производных вопрос решается точно: надо найти производную $\frac{dz}{dt}$. Если $\frac{dz}{dt} = z'(t)$ при заданном t есть положительная величина, то $z(t)$ есть растущая функция: при увеличении t на малую величину Δt температура изменится на малую величину $\Delta z = z'(t) \cdot \Delta t$ (как было выяснено раньше, чем меньше Δt, тем точнее это равенство). Мы рассматриваем $\Delta t > 0$ — увеличение времени. Если $z'(t) > 0$, $\Delta t > 0$, то и $\Delta z > 0$, т. е. с течением времени температура растет. Если $z'(t) < 0$, $\Delta t > 0$, то $\Delta z < 0$, т. е. температура в следующий момент $z(t + \Delta t)$ будет ниже температуры $z(t)$ в данный момент.

Таким образом, положительная производная указывает на то, что функция является растущей, а отрицательная производная — на то, что функция падающая.

Выражения «растущая функция» и «падающая функция» применяются не только к зависимости от времени, но и к любой функции $y(x)$; при этом растущей функцией называется такая, у которой y увеличивается при увеличении независимой переменной x.

Производная $\frac{dy}{dx}$ как раз и дает скорость роста, т. е. отношение изменения y к изменению x. Отрицательная скорость роста означает падение, уменьшение y при увеличении x, и если $\frac{dy}{dx} < 0$, то $\left(-\frac{dy}{dx}\right)$ есть скорость падения.

Выражение «величина y имеет большую отрицательную производную по x» обозначает, что y быстро падает с увеличением x. Положительная производная $\frac{dy}{dx}$ означает, что y растет с ростом x.

Физики и математики, в особенности будущие физики и математики, только что узнавшие, что такое производная, часто применяют это понятие и в повседневной жизни: «производная от моего настроения по времени положительна» — вместо «мое настроение улучшается».

Решите задачу-шутку: какой знак имеет производная от настроения по расстоянию до кресла зубного врача? Настроение ухудшается, «уменьшается», становится «отрицательным» по мере *уменьшения* расстояния, значит, производная положительна.

Может быть, писатели будут сетовать на засорение языка, но на самом деле такое вольное шуточное употребление математических понятий — это хорошая тренировка для будущих серьезных применений.

Есть функции, имеющие один и тот же знак производной при любых значениях переменной: таким свойством обладает, например, линейная функция $y = kx + b$, у которой $\frac{dy}{dx} = k$ — постоянная величина. Позже мы увидим, что у показательной функции $y = a^x$ производная имеет постоянный знак (хотя и не постоянна по величине) при любых x. Однако постоянный знак производной, конечно, совершенно не обязателен; знак производной данной функции может быть различным при различных значениях независимой переменной.

Представим себе функцию $y(x)$, производная которой $y'(x)$ положительна при $x < x_0$ и отрицательна при $x > x_0$: кратко, $y'(x) > 0$, $x < x_0$; $y'(x) < 0$, $x > x_0$.

Что можно сказать о такой функции? Начнем с $x < x_0$. При увеличении x до x_0 y будет расти; при дальнейшем увеличении x y падает. Отсюда вывод: при $x = x_0$ функция $y(x)$ имеет максимум.

Рассмотрим противоположный случай:

$$y'(x) < 0, \quad x < x_0; \qquad y'(x) > 0, \quad x > x_0.$$

Рассуждая таким же способом, придем к выводу, что в этом случае при $x = x_0$ $y(x)$ имеет минимум.

Если функция $y(x)$ задана формулой, которой соответствует плавная кривая, так что и $y'(x)$ плавно изменяется при изменении x, то разный знак $y'(x)$ при $x < x_0$ и $x > x_0$ в обоих случаях обозначает, что при $x = x_0$ $y'(x_0) = 0$.

Таким образом, приравнивая нулю производную, мы можем найти те значения независимой переменной, при которых функция имеет максимум или минимум. Об исключениях из этого правила для негладких кривых поговорим позже, в главе III.

Приведем численный пример. В § 1 главы IV составлена таблица функции $y=3x^3-x^2-x$, см. стр. 216. Судя по этой таблице, можно было бы думать, что функция является растущей при всех значениях x, так как каждое увеличение x на единицу вызывало увеличение y.

Составим производную

$$y'=9x^2-2x-1.$$

Взяв $x=0$, получим $y'(0)=-1<0$. Значит, при $x=0$ функция — падающая; это опровергает предположение, что функция везде растущая, полученное из рассмотрения таблицы.

Приравняем $y'(x)$ нулю. Решая уравнение

$$9x^2-2x-1=0,$$

найдем два корня:

$$x_1=-0{,}24; \quad x_2=+0{,}46.$$

Составим подробную таблицу 3, включая найденные точки максимума и минимума.

Таблица 3

x	−2	−1	−0,30	−0,24	−0,18
y	−26	−3	+0,129	+0,140	+0,131

x	0	0,40	0,46	0,52	1	2
y	0	−0,372	−0,381	−0,370	+1	+18

Мы видим, что, действительно, на участке от $x=-0{,}24$ до $x=+0{,}46$ функция y падает от $+0{,}14$ до $-0{,}38$.

Сравнение значений $y(-0{,}24)$ с соседними $y(-0{,}30)$ и $y(-0{,}18)$ подтверждает, что при $x=-0{,}24$ y достигает

максимума, соседние y меньше. График функции $y=3x^3-x^2-x$ приведен на рис. 10.

Здесь же мы видим, что слово *максимум* надо понимать не в смысле наибольшего из всех возможных значений y. В самом деле, в точке максимума $y(-0{,}24)=+0{,}14$, а при $x=1$ $y=1$, при $x=2$ $y=+18$, при $x=10$ $y=269$, и т. д., при неограниченном увеличении x y также неограниченно растет. Чем же отличается найденная нами точка максимума*) $x_{max}=-0{,}24$, $y=0{,}14$?

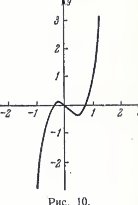


Рис. 10.

Отличие ее в том, что при близких соседних значениях x, как бо́льших x_{max}, так и меньших x_{max}, величина y меньше, чем $y_{max}=y(x_{max})$. Эта особенность x_{max} наглядно видна в таблице (сравните $y(-0{,}30)$, $y(-0{,}24)$ и $y(-0{,}18)$). Такие же соображения относятся и к минимуму: при $x_{min}=0{,}46$ $y_{min}=-0{,}381$; при больших по абсолютной величине отрицательных x y неограниченно уменьшается и становится меньше y_{min}, но x_{min}, y_{min} отличается тем, что y_{min} меньше значений y при x, близких к x_{min}. Условие равенства нулю производной дает возможность найти именно т а к и е максимумы и минимумы.

Определение максимумов и минимумов арифметическим путем, вычислением и сравнением значений функции при различных значениях аргумента, является во много раз более трудоемким и менее точным. Высшая математика является не только замечательным идейным достижением. Практические, конкретные вычислительные задачи также гораздо легче решаются методами высшей математики.

Остановимся в заключение данного параграфа на вопросе о том, как отличить максимум от минимума, когда мы пользуемся условием $y'(x)=0$. Это условие выполняется

*) Значок max при x — сокращение латинского слова maximum — максимум, читается: «икс — макс» или «икс — максимум»; значок min — minimum — минимум.

и в максимуме и в минимуме, разница же заключается в знаке $y'(x)$ при $x < x_0$ и при $x > x_0$.

Как определить знак $y'(x)$ при x, близком к x_0, не вычисляя непосредственно y' для других значений x? В первом случае мы видели, что функция $y(x)$ имеет максимум, когда $y'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $y'(x) < 0$ при $x > x_0$. Следовательно, в этом случае производная $y'(x)$ сама представляет собой падающую функцию: по мере роста x производная, которая сначала была положительной (при $x < x_0$), обращается в нуль (при $x = x_0$) и, продолжая падать, становится отрицательной при $x > x_0$. Но мы уже знаем, как отличить падающую функцию: ее производная отрицательна. Следовательно, в первом случае при том значении $x = x_{max}$, при котором y имеет максимум, $y'(x_0) = 0$, а производная от производной отрицательна. Такая величина — производная от производной, — которую можно по общим правилам трехэтажно записать

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

имеет свое название — «вторая производная». Ее обозначают также $y''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Итак, условие максимума

$$y'(x) = 0, \quad y''(x) < 0.$$

Таким же способом можно проверить, что при том x, для которого

$$y'(x) = 0, \quad y''(x) > 0,$$

функция $y(x)$ имеет минимум.

Обратимся к примеру, рассмотренному выше,

$$y = 3x^3 - x^2 - x, \quad y' = 9x^2 - 2x - 1.$$

Взяв производную от y', найдем:

$$y'' = 18x - 2.$$

При $x = -0{,}24$ $y' = 0$, $y'' = -6{,}3 < 0$, и действительно, $x = -0{,}24$, $y = 0{,}14$ есть максимум. При $x = +0{,}46$ $y' = 0$, $y'' = +6{,}3 > 0$, при $x = 0{,}46$ $y = -0{,}38$, y имеет минимум.

Упражнения

Найти значения x, при которых достигается максимум или минимум нижеследующих функций. В каждом случае выяснить, имеем ли мы дело с минимумом или с максимумом. В функциях, в которые входит постоянная, заданная буквой a, дать ответ для $a > 0$ и для $a < 0$.

1. $y = ax^2$. 2. $y = x + \frac{1}{x}$. 3. $y = x + \frac{a}{x}$. 4. $y = x^3 - x$.
5. $y = x^4 + ax^2 + b$.

§ 7. Определение пути по скорости движения и площадь под кривой

Задача об определении мгновенной скорости движения $v(t)$ по заданной зависимости положения тела от времени $z(t)$ привела нас к понятию производной

$$v(t) = \frac{dz}{dt}.$$

Обратная задача заключается в определении положения тела и пути, пройденного телом за данный отрезок времени, когда задана мгновенная скорость $v(t)$ как функция времени. Эта задача приводит ко второму важнейшему понятию высшей математики — понятию *интеграла*.

Условимся об удобных обозначениях. Рассматриваем путь, пройденный за время от t_1 до t_2. Чтобы не писать индексов, назовем начало рассматриваемого промежутка времени одной буквой n («эн» — начало), $t_1 = n$, и конец этого промежутка k («ка» — конец), $t_2 = k$. Пройденный путь обозначим $z(n, k)$. Запомним, что когда в скобках под знаком функции z стоят две величины n и k, то $z(n, k)$ есть длина пути, пройденного за время от n до k, тогда как $z(t)$ с одной величиной в скобках есть положение (координата) тела в заданный момент t. Между этими величинами есть простая связь:

$$\left.\begin{aligned} z(k) &= z(n) + z(n, k), \\ z(n, k) &= z(k) - z(n). \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

Путь, пройденный за время от n до k, равен разности координаты в конце рассматриваемого промежутка времени $z(k)$ и в начале этого промежутка $z(n)$.

Теперь обратимся к вычислению $z(n, k)$.

В простейшем случае, если скорость постоянна

$$v(t) = \text{const} = v_0, \qquad (7.2)$$

пройденный путь, очевидно, равен просто произведению времени движения на скорость

$$z(n,\ k) = (k-n)\,v_0. \qquad (7.3)$$

Если воспользоваться графиком зависимости скорости от времени, то на таком графике постоянной скорости соответствует горизонтальная прямая (рис. 11). Пройденный путь, очевидно, равен заштрихованной площади, потому что площадь прямоугольника равна произведению основания $(k-n)$ на высоту (v_0).

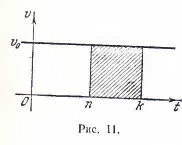


Рис. 11.

Как быть в общем случае, когда мгновенная скорость не постоянна?

Рассмотрим подробно один численный пример. Пусть скорость движения задана формулой*) $v = t^2$. Найдем путь за время от $t = n = 1$ до $t = k = 2$.

Разобьем весь промежуток от n до k на десять частей и составим таблицу скорости (табл. 4). Сокращенно назовем Δt малые промежутки времени по 0,1 *сек*, на которые мы разбили весь промежуток от $t = n$ до $t = k$.

Таблица 4

t	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
v	1,0	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4,0

*) Скорость v выражена в *см/сек*, t — в *сек*; чтобы соблюдались требования размерности, напишем $v = at^2$, где a имеет размерность *см/сек*^{3}. Рассматриваем частный случай, когда коэффициент a численно равен 1 *см/сек*^{3}.

В чем трудность вычисления пути при скорости $v(t)$, заданной формулой? Очевидно, все дело в том, что скорость переменна, для постоянной скорости ответ элементарен. В рассматриваемом примере во всем промежутке времени от $t=1$ до $t=2$ скорость меняется в 4 раза. Однако после того как этот промежуток разбит на 10 частей, в каждом маленьком промежутке времени длительностью 0,1 *сек* скорость меняется меньше — всего на 10—20%. Следовательно, в маленьких промежутках скорость можно приближенно считать постоянной и рассчитывать путь в течение малого промежутка времени как произведение этого промежутка времени на скорость.

Для вычисления пути в каждом промежутке Δt, составляющем 0,1 *сек*, используем начальную скорость в этом Δt: 1 *см/сек* в Δt от 1 до 1,1 *сек*, 1,21 *см/сек* в Δt от 1,1 до 1,2 *сек* и т. д.; наконец, 3,61 *см/сек* в последнем Δt от 1,9 до 2,0 *сек*. Полный пройденный путь за промежуток времени от $t=1$ до $t=2$ при этом способе подсчета окажется равным

$$z(1;\ 2)=0,1+0,121+0,144+\ldots+0,361=2,185\ \text{см}.$$

Очевидно, в таком расчете мы преуменьшили пройденный путь: скорость в данном примере с течением времени растет, поэтому скорость в начале каждого Δt меньше средней скорости. Каждое из десяти слагаемых, на которые разбит весь путь, несколько занижено, следовательно, занижен и весь результат.

Теперь подсчитаем путь по-другому, а именно, в каждом Δt будем брать значение скорости в конце промежутка Δt. Для первого Δt от 1 до 1,1 *сек* эта скорость равна 1,21 *см/сек*, для последнего от 1,9 до 2 *сек* скорость равна 4 *см/сек*. Тогда для пройденного пути получим:

$$z(1;\ 2)=0,121+0,144+\ldots,+0,400=2,485\ \text{см}.$$

Такой расчет, очевидно, дает преувеличенное значение $z(1;\ 2)$. Значит, истинное значение лежит в пределах между 2,185 и 2,485 *см*. Различие между 2,185 и 2,485 составляет около 15%. Округляя границы для z, получаем:

$$2,18<z(1;\ 2)<2,49.$$

Проделанный расчет можно пояснить графически. Построим график (рис. 12), на котором по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат — скорость. Для того чтобы ступеньки были хорошо видны, на чертеже промежуток времени разбит на пять частей (а не на десять частей, как в таблице). Каждое слагаемое в первой сумме представляет

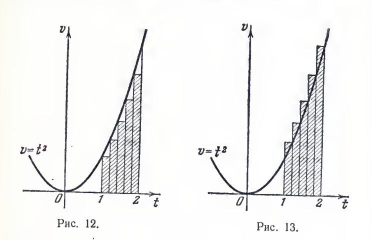


Рис. 12. Рис. 13.

собой площадь узенького прямоугольника, основанием которого является соответствующий интервал Δt, а высотой — скорость в начале интервала. Следовательно, сумма представляет собой площадь под ломаной (ступенчатой) линией, заштрихованную на рис. 12. Вторая сумма, в которой в каждом интервале бралась скорость в конце промежутка, соответствует площади, заштрихованной на рис. 13.

Как точнее подсчитать путь, пройденный за данное время, от $t=n=1$ *сек* до $t=k=2$ *сек*?

Различие между нижней и верхней оценкой, т. е. разность между величинами 2,18 и 2,49, зависит от изменения скорости в пределах каждого интервала Δt.

Для того чтобы найти более точное значение $z(1;\ 2)$, надо разбить весь промежуток времени от 1 до 2 *сек* на большее число промежутков меньшей длины. Так, например, если разбить промежутков от 1 до 2 *сек* на 20 про-

межутков Δt по 0,05 *сек*, то такой же расчет даст по начальным скоростям в каждом Δt

$$z(1;\ 2) = 0{,}05 + 0{,}05 \cdot 1{,}1025 + \ldots + 0{,}05 \cdot 3{,}8025 = 2{,}25875,$$

а по конечным скоростям

$$z(1;\ 2) = 0{,}05 \cdot 1{,}1025 + 0{,}05 \cdot 1{,}21 + \ldots + 0{,}05 \cdot 4 = 2{,}40875.$$

Различие между 2,25875 и 2,40875 составляет около 7%. Пределы, в которых заключено $z(1;\ 2)$, сузились. Округленно

$$2{,}26 < z(1;\ 2) < 2{,}41.$$

При уменьшении Δt результат приближается к истинному значению пути, которое будет вычислено в дальнейшем и окажется равным

$$z(1;\ 2) = 2\frac{1}{3} = 2{,}333\ldots$$

При уменьшении Δt уменьшается различие между начальной и конечной скоростями в каждом малом промежутке Δt, следовательно, уменьшается относительная ошибка в каждом слагаемом; поэтому и вся сумма путей за все Δt, т. е. величина $z(1;\ 2)$, определяется тем точнее, чем меньше Δt (число малых промежутков, равное $\frac{k-n}{\Delta t}$, при этом увеличивается).

Геометрически очевидно, что при увеличении числа промежутков Δt и уменьшении длины каждого промежутка уменьшаются размеры каждой ступеньки на рис. типа 12, 13 и, следовательно, ступенчатая линия становится все ближе к кривой $v(t)$.

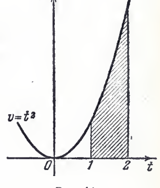


Рис. 14.

Таким образом, мы приходим к выводу, что путь, пройденный за время от $t = n$ до $t = k$ при произвольной зависимости мгновенной скорости от времени $v(t)$, равен площади, ограниченной кривой $v(t)$, вертикалями $t = n$ и $t = k$ и осью t (рис. 14).

Этот вывод дает способ практического вычисления пути: можно построить график на миллиметровке и определить заштрихованную площадь либо подсчетом клеточек, либо, например, вырезав эту площадь из бумаги, взвесив вырезанный листочек и сравнив его вес с весом вырезанного из той же бумаги прямоугольника или квадрата с известной площадью.

Такой способ удобен и вполне оправдан, когда скорость известна не точно, задана в виде таблицы или графика, полученных из опыта. Но мы не остановимся на этих приближенных способах и выясним дальше, как выразить формулой пройденный путь, когда скорость задана формулой.

Можно уточнить и численный метод определения пути по сравнению с теми вычислениями, которые были приведены выше: для этого путь в каждом малом промежутке времени будем определять по среднему арифметическому (т. е. полусумме) начальной и конечной скорости в данном промежутке. При таком способе, при разбивке на десять промежутков, скорость в первом промежутке от 1 до 1,1 *сек* примем равной $\frac{1+1,21}{2}=1,105$ *см/сек* и путь за этот промежуток времени 0,1105 *см*, путь за второй промежуток $0,1\cdot\frac{1,21+1,44}{2}=0,1325$ *см* и т. д. Складывая их, получим таким способом путь, пройденный за все время от $n=1$ *сек* до $k=2$ *сек*, равным

$$z(1;\ 2)=0,1105+0,1325+\ldots=2,335\ см.$$

При разбивке на 20 промежутков получим таким же способом (по полусумме скоростей)

$$z(1;\ 2)=2,33375\ см.$$

Эти значения гораздо ближе к истинной величине 2,3333 *см*, чем вычисленные по начальному или конечному значению скорости при том же числе промежутков: при десяти промежутках ошибка равна $0,07\%$ вместо 15% в прежнем способе, при 20 промежутках ошибка $0,02\%$ вместо 7%.

Такой способ также можно наглядно пояснить на графике. Произведение полусуммы скоростей в начале и

в конце промежутка на величину промежутка времени есть площадь трапеции $ABCD$ (рис. 15): ее основания AB и DC, высота AD, площадь

$$\frac{AB+DC}{2}AD=\frac{v(t_1)+v(t_2)}{2}(t_2-t_1).$$

Поэтому определение пути по полусуммам скоростей называется «методом трапеций». При том виде, который имеет кривая $v(t)$ на рис. 15, площадь трапеции несколько больше площади, ограниченной прямыми BA, AD, DC и отрезком кривой BC. Разность площади трапеции и площади, ограниченной отрезком кривой, равна площади луночки, образованной хордой BC и отрезком кривой BC (заштрихована на рис. 15). Эта площадь и дает ошибку — разность между истинным значением пути и вычисленным по методу трапеций. Сравнение с рис. 12, 13 наглядно показывает, что ошибка в методе трапеций должна быть меньше, чем в методе ступенек.

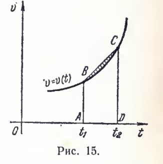


Рис. 15.

Когда мы сравниваем путь и площадь на графике, необходимо учитывать масштаб, в котором составлен график. Пусть на графике 1 *см* по оси абсцисс соответствует промежутку времени T *сек*, 1 *см* по оси ординат соответствует скорости V *см/сек*. Тогда при движении с постоянной скоростью v_0 в течение времени от n до k путь равен $v_0(k-n)$, а площадь прямоугольника на графике (рис. 11) равна

$$S=\frac{v_0}{V}\frac{(k-n)}{T}\,см^2.$$

Таким образом,

$$z(n,\ k)=SVT.$$

Это соотношение между пройденным путем и площадью на графике скорости, ограниченной кривой $v(t)$, осью абсцисс и вертикалями, сохраняется и в случае переменной скорости и произвольной зависимости $v(t)$.

Таким образом, мы подробно рассмотрели способы приближенного численного и графического определения пройденного пути по заданной зависимости скорости от времени.

§ 8. Определенный интеграл

В предыдущем параграфе две задачи — задача определения пройденного пути и равносильная ей задача определения площади под кривой — привели к рассмотрению сумм особого вида с большим числом малых слагаемых.

Постановка этих задач приводит к понятию интеграла.

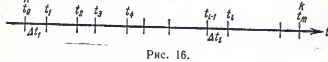


Рис. 16.

Величина пути $z(n, k)$, найденная по заданной скорости $v(t)$, называется «определенным интегралом функции $v(t)$ (скорости) по переменной t (времени), взятым от n до k».

Дадим математическое определение интеграла, соответствующее тем идеям, которые были иллюстрированы численным примером предыдущего параграфа. Это определение останется вѐрным и в том случае, если рассматриваются не скорость и путь, а какие-либо другие физические или математические величины.

Итак, пусть дана функция $v(t)$. Для нахождения ее интеграла от n до k разбиваем промежуток от n до k на большое число m малых промежутков. Значения аргумента t на границах малых промежутков обозначим t_0, t_1, t_2, ..., t_{m-1}, t_m. При этом, очевидно, $t_0 = n$ и последнее $t_m = k$ (рис. 16).

Длины малых промежутков времени Δt равны разности соседних значений t *).

*) Если разбивать промежуток от n до k специально на m равных частей, то каждый промежуток $\Delta t = \frac{k-n}{m}$. Однако для дальнейшего не обязательно, чтобы все части, на которые разбит промежуток, были равны между собой, нужно только, чтобы каждый промежуток Δt был мал. Читатель может убедиться в этом, продумав пример путь — скорость из § 7.

Номер промежутка соответствует номеру аргумента в конце промежутка (рис. 16). Таким образом, для какого-нибудь произвольного l

$$\Delta t_l = t_l - t_{l-1}.$$

Значки снизу у величин t и Δt представляют собой не множители, а номера, или, как их иначе называют, «индексы» (см. сноску на стр. 223).

Приближенное значение интеграла $z(n, k)$ дается формулой

$$z(n, k) \approx \sum_{l=1}^{l=m} v(t_{l-1}) \Delta t_l. \tag{8.1}$$

Знак $\sum$ есть прописная греческая буква Σ (читается: «сигма»). Буква Σ в греческом алфавите соответствует букве S латинского алфавита — первой букве слова *сумма*. $\sum\limits_{l=1}^{l=m}$ означает, что выражение, стоящее справа от этого знака и зависящее от индекса l, надо взять при всех значениях l от 1 до m и все эти выражения надо сложить. Так, например, если $m = 10$, то

$$\sum_{l=1}^{l=10} v(t_{l-1}) \Delta t_l = v(t_0) \Delta t_1 + v(t_1) \Delta t_2 + \ldots + v(t_9) \Delta t_{10}.$$

В примере § 7 в табл. 4 $t_0 = 1$, $t_1 = 1{,}1$, $t_2 = 1{,}2$, ...,

$$z(1;\ 2) = z(n, k) \approx \sum_{l=1}^{l=10} t_{l-1}^2 \Delta t_l = 2{,}185.$$

В приближенном выражении (8.1) в каждом промежутке значение функции $v(t)$ бралось в начале промежутка — в точке t_{l-1}. Другое приближенное выражение получим, беря в каждом промежутке значение функции в конце промежутка

$$z(n, k) \approx \sum_{l=1}^{l=m} v(t_l) \Delta t_l. \tag{8.2}$$

В примере § 7 при $m = 10$ эта сумма равнялась 2,485.

Определенным интегралом функции $v(t)$, взятым от n до k, называется предел, к которому стремятся суммы (8.1) и (8.2) при стремлении к нулю всех промежутков Δt.

Интеграл записывается в виде *)

$$z(n,\ k)=\int\limits_{n}^{k} v(t)\,dt. \tag{8.3}$$

Знак $\int$ (интеграл) происходит также от латинской буквы S (первой буквы слова «сумма»), он получился растягиванием этой буквы.

Знак dt в отличие от Δt означает, что для получения точного значения интеграла необходимо перейти к пределу, когда все промежутки Δt стремятся к нулю. Формулы (8.1) и (8. 2) с конечными Δt дают только приближенные значения интеграла. Напомним, что в § 2, рассматривая производную, мы также заменяли конечные отрезки Δz и Δt дифференциалами dz и dt.

Когда малые промежутки Δt становятся все мельче и мельче, то уже становится безразличным, брать ли значение функции v в начале, в конце или где-нибудь внутри промежутка, т. е. безразлично, исходить из (8.1) или из (8.2), и в формуле (8.3) стоит просто $v(t)$ — значение функции в промежутке dt, без указания того, берется значение $v(t)$ в начале или в конце промежутка.

Следующее отличие интеграла (8.3) от сумм (8.1) и (8.2), которые дают приближенно значения интеграла, заключается в том, что при уменьшении величин Δt и при увеличении числа малых промежутков мы отказываемся от того, чтобы нумеровать их. Поэтому у интеграла указываются только пределы изменения t от n до k.

Величина n ставится внизу и называется нижним пределом интегрирования, величина k стоит у верхнего конца знака интеграла и называется верхним пределом **).

---

*) Читается: «зет от эи, ка равняется интегралу от эи до ка вэ от тэ де тэ».

**) В этом параграфе слово «предел» употребляется в двух смыслах: интеграл есть предел суммы в том же смысле, в котором производная есть предел отношения. Здесь слово «предел» соответствует знаку lim. Кроме того, мы говорим о пределах изменения t от n до k, о пределах интегрирования n и k. Здесь слово «предел» имеет другой смысл. Внимательный читатель не запутается в этих двух значениях слова «предел».

Промежуток изменения t от n до k называется промежутком интегрирования. Функцию $v(t)$ в выражении интеграла называют «подынтегральная функция», t — «переменная интегрирования».

Таким образом, интеграл определяется как предел, к которому стремится сумма произведений значений функции на разность значений аргументов при стремлении к нулю всех разностей аргументов:

$$\lim_{\Delta t_l \to 0} \sum_{l=1}^{l=m} v(t_l)\,\Delta t_l = \lim_{\Delta t_l \to 0} \sum_{l=1}^{l=m} v(t_{l-1})\,\Delta t_l = \int_n^k v(t)\,dt. \quad (8.4)$$

Хотя первая и вторая суммы в равенстве (8.4) при конечном числе малых промежутков различны, пределы их при неограниченном уменьшении всех промежутков Δt одинаковы.

При стремлении Δt к нулю каждое отдельное слагаемое стремится к нулю, но зато возрастает, стремится к бесконечности, число членов суммы. Сама сумма стремится к вполне определенному пределу, являющемуся решением задачи и называемому «интеграл». Этот предел, т. е. интеграл функции, равен пройденному пути, если функция представляет собой мгновенную скорость.

Разумеется, далеко не всякая сумма большого числа m малых слагаемых стремится к определенному пределу при $m \to \infty$. Поясним, почему в нашем случае такой предел должен быть. Будем разбивать отрезок длиной $k-n$ на m равных промежутков. Длина каждого промежутка $\Delta t_l = (k-n)/m$. Если для простоты взять скорость v постоянной, то мы получим сумму m слагаемых, каждое из которых равно $v\,\Delta t = v(k-n)/m$. В итоге вся сумма (т. е. пройденный путь) равна $mv\,\Delta t = mv(k-n)/m = v(k-n)$, т. е. не зависит от m. Здесь очень важно, что каждое отдельное слагаемое убывает как раз в такой пропорции (пропорционально $1/m$), в какой растет число слагаемых m. Ясно, что и для случая переменной скорости результат не будет зависеть от m при очень большом числе m мелких отрезков $\Delta t = (k-n)/m$. Для того чтобы убедиться в этом, читателю можно порекомендовать проделать упражнения к этому параграфу.

Поскольку переменная интегрирования может принимать значения n и k, то ясно, что пределы интегрирования имеют размерность и их размерность равна размерности переменной интегрирования (в примере путь — скорость пределы интегрирования имеют размерность времени). Размерность интеграла легко получить из формулы (8.1). Действительно, размерность суммы равна размерности отдельных слагаемых.

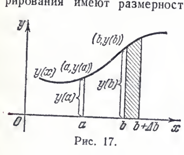


Рис. 17.

Отдельные слагаемые суммы (8.1) имеют размерность, равную произведению размерности переменной интегрирования на размерность подынтегральной функции. В примере путь — скорость размерность интеграла есть *сек·см/сек = см*.

Заметим, что величина определенного интеграла зависит от значений стоящей под знаком интеграла функции лишь внутри промежутка интегрирования. Значения функции вне промежутка интегрирования на величину интеграла никак не влияют. Это станет совершенно ясным, если вспомнить пример путь — скорость. Пройденный путь зависит, конечно, от скорости ($v(t)$), но зависит лишь от ее значений внутри промежутка интегрирования. Пройденный путь $z(n, k)$ совершенно не зависит от того, какова была скорость *до* момента $t = n$ (от которого мы начали рассматривать движение) и какова она стала *после* момента $t = k$.

В § 7 отмечалось, что путь можно определить, вычислив площадь на графике зависимости скорости от времени. Задача нахождения *площади* S, ограниченной сверху кривой с заданным уравнением $y(x)$, снизу — осью абсцисс (осью x), с боков — линиями $x = a$ и $x = b$ (рис. 17), также сводится к вычислению интеграла

$$S = \int_a^b y(x)\,dx.$$

Для пояснения нужно вернуться к рис. 12 и 13; представим себе, что по оси ординат откладываются значения

какой-то функции $y(x)$, по оси абсцисс — независимая переменная x, причем $y(x)$ не имеет отношения к движению и скорости; вместо n и k подставим буквы a и b. Сумма площадей прямоугольников, заштрихованных на рис. 12, равна $\sum_{l=1}^{l=m} y(x_{l-1})\Delta x_l$, а такая же сумма на рис. 13 равна $\sum_{l=1}^{l=m} y(x_l)\Delta x_l$. В пределе при $\Delta x_l \rightarrow 0$ эти суммы по определению равны интегралу, а сумма площадей прямоугольников стремится к площади ограниченной кривой $y(x)$, так как чем меньше все Δx_l, тем ближе к кривой ломаная (зубчатая) линия, ограничивающая прямоугольники.

В заключение отметим, что определенный интеграл зависит от подынтегральной функции и пределов интегрирования, но не зависит от обозначения переменной интегрирования. Поясним сказанное. Пусть дана, например, подынтегральная функция

$$v(t) = 3t^2 + 5.$$

Подставив значение $t = x$, получим:

$$v(x) = 3x^2 + 5.$$

При вычислении же интеграла безразлично, как называлась переменная интегрирования, важно только, в каких пределах она менялась, каковы были значения функции. Поэтому

$$z(n,\ k) = \int_n^k v(t)\,dt = \int_n^k v(x)\,dx.$$

Переменную интегрирования можно называть как угодно.

Переменная, которая не входит в окончательный результат, подобно переменной интегрирования, называется немой переменной. Переменную интегрирования можно заменить под интегралом любой буквой, не нарушая справедливости формул. Обычную, не немую, переменную можно заменять другой буквой только во всех частях формулы: например, в формуле $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ нельзя написать $(t+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, а в интегралах можно писать

$$\int_n^k v(t)\,dt = \int_n^k v(x)\,dx.$$

Упражнения

1. Рассмотреть случай $v=at+b$ (равноускоренное движение). Найти путь за время от n до k, разбивая это время на m равных интервалов; воспользоваться тем, что слагаемые сумм образуют арифметическую прогрессию. Найти предел суммы при $m\to\infty$. Сравнить полученное выражение с площадью трапеции на плоскости v, t, равной пройденному пути.

2. Рассмотреть случай $v=t^2$ и для этого случая найти путь за время от $t=1$ до $t=2$, т. е. найти интеграл

$$\int_1^2 t^2\,dt.$$

Для этого можно воспользоваться разбиением интервала от 1 до 2 на m равных частей и сосчитать сумму $\sum t_{i-1}^2\cdot\frac{1}{m}$ или $\sum t_i^2\cdot\frac{1}{m}$. Сравнить эти две суммы.

§ 9. Связь между интегралом и производной (теорема Ньютона—Лейбница)

В предыдущих параграфах мы рассмотрели отдельно понятия производной и интеграла. В неявном виде эти понятия использовались математиками еще до Ньютона и Лейбница. Величайшей заслугой этих двух математиков явилось именно установление связи между этими понятиями, приведшее к столь бурному развитию математики в последующие годы и десятилетия. В настоящем параграфе мы найдем эту связь на примере путь — скорость.

Будем считать заданной и известной зависимость от времени мгновенной скорости $v(t)$. Будем считать постоянным момент $t_1=n$ начала пути. Рассмотрим путь, пройденный за время от $t_1=n$ до $t_2=k$, как функцию конечного момента k. Мы знаем, что

$$z(k,\ n)=z(k)-z(n).$$

Возьмем производную от левой и правой частей; при этом n рассматривается как постоянная величина, следовательно, и $z(n)$ есть постоянная величина. Получим:

$$\frac{dz(k,\ n)}{dk}=\frac{dz(k)}{dk}.$$

Но мы знаем, что производная от координаты тела по вре-

мени есть не что иное, как мгновенная скорость тела

$$\frac{dz(k)}{dk} = v(k),$$

значит, и

$$\frac{dz(n, k)}{dk} = v(k).$$

Подставим сюда выражение $z(n, k)$ в виде интеграла. Получим:

$$\frac{d}{dk}\left(\int_n^k v(t)\,dt\right) = v(k). \qquad (9.1)$$

Это равенство является важнейшим общим свойством определенного интеграла. Это равенство в таком виде является общей математической теоремой; его правильность не зависит от того, является ли $v(t)$ скоростью (а интеграл — путем) или $v(t)$ есть какая-то другая величина. Для любой функции, например $y(x)$, имеем:

$$\frac{d}{db}\left(\int_a^b y(x)\,dx\right) = y(b). \qquad (9.2)$$

Формулировка теоремы: *производная от определенного интеграла по его верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе.*

Ввиду важности теоремы дадим другой вывод ее, основанный на рассмотрении площади. Производную будем вычислять по всем правилам, как предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной.

Рассматриваем

$$I(a, b) = \int_a^b y(x)\,dx.$$

Этот интеграл есть площадь, ограниченная сверху кривой $y(x)$, снизу осью x, слева — вертикалью $x = a$, справа — вертикалью $x = b$ (см. рис. 17).

Как найти приращение интеграла? По общим правилам $\Delta I = I(a, b + \Delta b) - I(a, b)$. Площадь, равная интегралу

$I(a, b+\Delta b)$, отличается от площади $I(a, b)$ тем, что правая вертикаль сместилась еще вправо на Δb (см. рис. 17).

Следовательно, приращение ΔI есть разность двух площадей: площади от a до $b+\Delta b$ и площади от a до b. Очевидно, ΔI есть площадь полоски, заштрихованной на рис. 17. Основанием этой полоски на оси x является отрезок длиной Δb. Искомая производная равна пределу

$$\frac{dI(a,b)}{db} = \lim_{\Delta b \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta b}.$$

Очевидно, что при стремлении Δb к нулю площадь полоски приближается к $y(b)\Delta b$, а отношение $\frac{\Delta I}{\Delta b}$ — к величине $y(b)$. Таким способом мы снова наглядно доказали теорему

$$\frac{d}{db}\left(\int_a^b y(x)\,dx\right) = y(b). \tag{9.2}$$

Определенный интеграл известной функции $y(x)$ или $v(t)$ есть функция пределов интегрирования a, b или n, k.

Определение интеграла как предела суммы, которое было дано в предыдущем параграфе, объясняет нам, какую роль играет понятие интеграла в решении физических задач: в вычислении пройденного пути при переменной скорости $v(t)$, в определении площади, ограниченной кривой, заданной уравнением $y=y(x)$. Но это определение не дает удобного общего способа вычисления интеграла, не дает удобного способа нахождения интеграла в виде формулы, как функции пределов интегрирования *).

Способ нахождения такой формулы следует из доказанной выше теоремы о производной от интеграла. При этом, кроме свойства производной от интеграла, используется еще второе свойство определенного интеграла: определенный интеграл равен нулю, когда верхний и нижний пределы его совпадают

$$z(n, k=n) = \int_n^n v(t)\,dt = 0.$$

*) Лишь в редких случаях и с трудом удается провести суммирование произвольного числа малых слагаемых.

Это свойство вполне очевидно: путь равен нулю, если время пути $k-n=n-n=0$.

Сама формула, дающая значение интеграла как функции пределов интегрирования, будет выведена таким способом в § 12. Предварительно в § 11 мы дадим более простой вывод.

§ 10. Интеграл от производной

Пусть подынтегральная функция $v(t)$ равна производной известной функции $f(t)$,

$$v(t)=f'(t)=\frac{df}{dt}. \qquad (10.1)$$

В этом случае можно найти точное значение интеграла следующим образом. Вспомним приближенное выражение приращения функции f (§ 4)

$$\Delta f \approx f'(t)\,\Delta t = v(t)\,\Delta t. \qquad (10.2)$$

Величина, стоящая в правой части равенства, представляет собой как раз одно из тех слагаемых, сумма которых равна интегралу. Значит, можно написать приближенно

$$\Delta f = f(t_{l+1})-f(t_l) \approx \approx v(t_{l+1})(t_{l+1}-t_l) \approx v(t_l)(t_{l+1}-t_l). \qquad (10.3)$$

Как уже говорилось раньше, равенство (10.2) является приближенным и оно тем точнее, чем меньше приращение

n k
t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t

Рис. 18.

Δt, т. е. чем меньше разность $t_{l+1}-t_l$. Но при уменьшении разности $t_{l+1}-t_l$, т. е. при сближении t_{l+1} и t_l, уменьшается и различие между $v(t_{l+1})$ и $v(t_l)$; поэтому в правой части формулы (10.3) с одинаковым правом, с одинаковой степенью точности можно ставить и $v(t_{l+1})$ и $v(t_l)$, как это и сделано выше. Напишем формулы такого вида, как (10.3), для *всех* промежутков, на которые разбита область интегрирования, т. е. интервал от n до k. Пусть, например, интервал разбит на пять промежутков (рис. 18), так что $t_0=n$, $t_5=k$.

Не поленимся и выпишем все пять равенств:

$$f(t_1)-f(t_0) \approx v(t_1)(t_1-t_0) \approx v(t_0)(t_1-t_0),$$
$$f(t_2)-f(t_1) \approx v(t_2)(t_2-t_1) \approx v(t_1)(t_2-t_1),$$
$$f(t_3)-f(t_2) \approx v(t_3)(t_3-t_2) \approx v(t_2)(t_3-t_2),$$
$$f(t_4)-f(t_3) \approx v(t_4)(t_4-t_3) \approx v(t_3)(t_4-t_3),$$
$$f(t_5)-f(t_4) \approx v(t_5)(t_5-t_4) \approx v(t_4)(t_5-t_4).$$

Сложим все эти пять равенств. В левой части сократятся все значения функции f при промежуточных значениях t, останется только

$$f(t_5)-f(t_0)=f(k)-f(n).$$

В правой части получатся как раз такие суммы, с помощью которых мы приближенно выражали интеграл в предыдущем параграфе, выражали путь $z(n, k)$ при данной скорости $v(t)$. Итак,

$$f(k)-f(n) \approx \sum v(t_{i+1})(t_{i+1}-t_i) \approx \sum v(t_i)(t_{i+1}-t_i) \approx$$
$$\approx z(n, k)=\int_n^k v(t)\,dt \quad \text{при} \quad v(t)=\frac{df}{dt}.$$

Чем меньше каждое приращение Δt, т. е. величина $t_{i+1}-t_i$, тем точнее выражение (10.3) приращения f; но при уменьшении разностей $t_{i+1}-t_i$ суммы стремятся к интегралу.

Поэтому равенство

$$f(k)-f(n)=\int_n^k v(t)\,dt \quad \text{при} \quad v(t)=\frac{df}{dt} \qquad (10.4)$$

в действительности является точным.

Формула (10.4) устанавливает связь между задачами об интеграле и о производной. Из этой формулы следует, что если удалось найти такую функцию f, производная которой равна подынтегральной функции v, то задача вычисления интеграла решена — остается подставить значения $f(k)$ и $f(n)$ и найти разность $f(k)-f(n)$.

Ввиду огромной важности этой формулы в следующих параграфах мы дадим другой вывод формулы (10.4) на основе более подробного рассмотрения свойств интеграла (см. конец § 9) и функции f.

§ 11. Неопределенный интеграл

В предыдущих параграфах мы ввели понятие определенного интеграла как предела суммы большого числа малых слагаемых. В § 9 было выяснено главное свойство определенного интеграла: производная определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции:

$$z(n, k) = \int_n^k v(t)\,dt; \quad \frac{dz(n, k)}{dk} = v(k). \qquad (11.1)$$

Теперь мы хотим воспользоваться этим свойством для вычисления определенного интеграла.

Итак, будем искать функцию k, производная которой есть известная функция $v(k)$. Обозначим эту функцию $f(k)$. Тогда, по определению,

$$\frac{df(k)}{dk} = v(k). \qquad (11.2)$$

Уравнение (11.2) не полностью определяет функцию $f(k)$. Мы знаем, что прибавление любой константы к функции $f(k)$ не меняет производную функции. Следовательно, если $f(k)$ удовлетворяет уравнению (11.2), то и функция $g(k) = f(k) + C$ удовлетворяет тому же уравнению.

Функцию $f(k)$, удовлетворяющую уравнению (11.2), называют «неопределенным интегралом функции $v(k)$». В этом названии отражаются два свойства $f(k)$: производная $f(k)$ такая же, как у определенного интеграла $z(n, k)$ *), поэтому $f(k)$ называют интегралом. К функции $f(k)$, удовлетворяющей (11.2), можно прибавить любую постоянную величину,— отсюда прилагательное «неопределенный».

Любое решение (11.2) может отличаться от какого-нибудь решения $f(k)$ только на ту или иную постоянную величину. В самом деле, если есть другое решение (11.2), которое мы обозначим $g(k)$, то для их разности получим:

$$\frac{d}{dk}[f(k) - g(k)] = v(k) - v(k) = 0.$$

Но только производная постоянной равна нулю при любых значениях аргумента.

*) Сравните формулы (11.1) и (11.2).

Определенный интеграл $z(n, k)$ согласно (11.1) тоже является одним из решений (11.2). Значит, и $z(n, k)$ можно представить в виде

$$z(n, k) = f(k) + B, \tag{11.3}$$

где $f(k)$ — какое-то решение (11.2), B — постоянная, и остается только ее определить. Для этого воспользуемся вторым свойством определенного интеграла: он равен нулю, когда верхний и нижний пределы совпадают,

$$z(n, k = n) = z(n, n) = 0. \tag{11.4}$$

Подставляя $k = n$ в (11.3), получим, используя (11.4):

$$0 = f(n) + B, \quad B = -f(n).$$

Отсюда следует окончательно:

$$z(n, k) = f(k) - f(n). \tag{11.5}$$

Отметим, что «неопределенность» функции $f(k)$ ничуть не мешает вычислению с ее помощью определенного интеграла по формуле (11.5). В самом деле, возьмем вместо $f(k)$ какое-нибудь другое решение уравнения (11.2), например $g(k)$, отличающееся от $f(k)$ на постоянную величину

$$g(k) = f(k) + C.$$

Будем вычислять определенный интеграл по формуле вида (11.5), только взяв g вместо f.

$$z(n, k) = g(k) - g(n) = f(k) + C - [f(n) + C] = f(k) - f(n).$$

Получили результат, совпадающий с (11.5).

Удобно обозначить неопределенный интеграл той же буквой z, которой мы обозначаем определенный интеграл.

При данной подынтегральной функции $v(t)$ определенный интеграл зависит от верхнего и от нижнего предела, т. е. является функцией двух переменных $z(n, k)$. Неопределенный интеграл есть функция одной переменной. Обозначим ее t. Итак, неопределенный интеграл $z(t)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению

$$z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} = v(t). \tag{11.6}$$

С помощью этой функции определенный интеграл $z(n, k)$ функции $v(t)$ находится по формуле

$$z(n, k) = \int_n^k v(t)\,dt = z(k) - z(n). \qquad (11.7)$$

Принята следующая краткая запись разности значений одной и той же функции при двух различных значениях переменной

$$z(t)\Big|_n^k = z(k) - z(n). \qquad (11.8)$$

В этой записи слева стоит функция немой переменной t, справа от нее ставится вертикальная черта, сверху — то значение переменной, при котором мы хотим взять функцию с плюсом, снизу — то значение, при котором функция берется с минусом.

Подставляя в (11.7) под интеграл $v(t)$, выраженное через $z(t)$ согласно (11.6), а в правую часть — выражение (11.8), получим тождество

$$\int_n^k z'(t)\,dt = z(t)\Big|_n^k. \qquad (11.9)$$

Обратите внимание на одинаковое расположение n и k слева и справа, облегчающее запоминание формулы.

Пора перейти к примерам.

Рассмотрим задачу о пути, пройденном за время от n до k при скорости движения, равной $v(t) = t^2$. Этот путь равен определенному интегралу

$$z(n, k) = \int_n^k t^2\,dt.$$

В этой задаче неопределенный интеграл $z(t)$ получается решением уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt} = v(t) = t^2.$$

Но мы знаем, что $\frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2$, значит, $\frac{d\left(\frac{t^3}{3}\right)}{dt} = \frac{1}{3}(3t^2) = t^2$.

Следовательно, уравнению удовлетворяет

$$z(t)=\frac{t^3}{3}.$$

Подставим это решение в формулу (11.9)

$$\int_n^k t^2\,dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_n^k=\frac{k^3}{3}-\frac{n^3}{3}.$$

Частный случай $n=1$, $k=2$ дает:

$$\int_1^2 t^2\,dt=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2{,}333\ldots$$

Таким образом, с помощью неопределенного интеграла мы на нескольких строчках получили *точно* результат, к которому мы мучительно приближались в § 9 численными расчетами.

Определенный интеграл есть предел суммы вида

$$v(t_0)(t_1-t_0)+v(t_1)(t_2-t_1)+\ldots$$

при стремлении к нулю каждого слагаемого и соответствующем увеличении числа слагаемых; для его приближенного вычисления нужно разбить область интегрирования на несколько интервалов, найти приближенное значение пути $v\Delta t$ в каждом интервале и сложить их. Чтобы получить хорошую точность, нужно сделать много арифметических операций. Но если известен неопределенный интеграл $z(t)$, т. е. известна функция, производная которой равна подынтегральной функции $v(t)$, то любой определенный интеграл $\int_n^k v(t)\,dt$ получается немедленно по формуле (11.9). Умение находить функции с заданной производной (неопределенные интегралы) «неожиданно» дает мощный способ вычисления сумм (определенных интегралов).

Неопределенный интеграл иногда называют «первообразной функцией». Этот термин применяется в учебниках в тех случаях, когда задачу о нахождении функции по известной ее производной решают раньше, чем рассмотрены определенные интегралы. Мы этот термин применять не будем.

Неопределенный интеграл всегда можно выразить через определенный интеграл:

$$z(t) = C + \int_a^t v(x)\,dx. \qquad (11.10)$$

Применяя правило о производной определенного интеграла по верхнему пределу, легко проверить, что $z(t)$, заданное уравнением (11.10), удовлетворяет уравнению (11.6) при любых постоянных C и a.

Во всех задачах в ответ всегда входит разность значений $z(k) - z(n)$, которая не зависит от C и a. Поэтому (11.10) можно писать короче:

$$z(t) = \int^t v(x)\,dx.$$

Наконец, часто пишут еще короче:

$$z(t) = \int v(t)\,dt. \qquad (11.11)$$

Этот способ весьма употребителен, и мы тоже будем им пользоваться, но надо иметь в виду, что такой способ записи, в сущности неправилен. Его можно сравнить с теми грамматически неправильными выражениями, которые широко применяются в разговорной речи и всем (кроме детей и педантов-придир) понятны, вроде «съесть тарелочку».

В записи (11.11) нарушено правило, по которому немая переменная интегрирования не входит в результат. Следовательно, употребляя краткую запись (11.11), надо всегда помнить, что это лишь условное сокращение точного выражения (11.10).

Известные нам формулы для производных дают таблицу неопределенных интегралов:

$$\int dt = t; \quad \int t\,dt = \frac{t^2}{2}; \quad \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}; \quad \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t};$$
$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\ ^{*)}.$$

Для того чтобы проверить любую из этих формул, достаточно найти производную от правой части. Если при этом получится

*) См. упражнение 6 к § 3.

функция, стоящая под интегралом, то формула верна. Подробно способы нахождения неопределенных интегралов от различных функций рассматриваются в главе II. Благодаря связи между интегралом и производной удается найти интегралы большого числа функций.

Задача интегрирования является технически более сложной, чем задача нахождения производных. Эта сложность проявляется, в частности, в том, что при интегрировании рациональных (не содержащих корней) алгебраических выражений в ответе появляются логарифмы и обратные тригонометрические функции; при интегрировании алгебраических выражений с корнями результат иногда выражается только при помощи новых, не элементарных функций, которые не могут быть выражены конечным числом действий над алгебраическими, степенными и тригонометрическими функциями.

Однако трудности выражения интегралов формулами не должны заслонять принципиальную простоту и ясность понятия интеграла. Если нельзя (или трудно) подсчитать интеграл по формуле (11.9), то его всегда можно подсчитать приближенно при помощи трудоемких, но в принципе весьма простых расчетов.

Упражнения

Найти величину интегралов:

1. $\int\limits_0^1 t^2\,dt$. **2.** $\int\limits_1^{1,1} t^2\,dt$. **3.** $\int\limits_1^2 \frac{dt}{t^2}$. **4.** $\int\limits_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

5. Найти площадь прямоугольного треугольника с основанием b и высотой h при помощи интеграла. Поместить начало координат в острый угол, прямой угол поместить на ось абсцисс в точке $x=b$, $y=0$ (рис. 19), найти уравнение гипотенузы в этой системе координат и найти площадь как интеграл. Воспользоваться при интегрировании формулой $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$.

Замечание. Не возмущайтесь тем, что приходится с трудом находить хорошо известный ответ $S=\frac{1}{2}bh$, потому что метод интегрирования будет применим там, где элементарные методы не дают ответа.

6. Найти площадь того же треугольника, помещая прямой угол в начало координат и острый угол в точку $x=b$, $y=0$ (рис. 20). При интегрировании использовать очевидное свойство интеграла суммы

двух членов $\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$ при любых f и g, постоянных или функциях x, положительных и отрицательных.

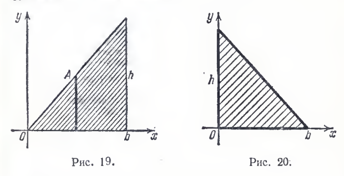


Рис. 19. Рис. 20.

Замечание. То же, что к упражнению 1.

2. Найти площадь под параболой $y = Ax^2$, проходящей через точку $x = x_0$, $y = y_0$, ограниченную вертикалью $x = x_0$ и осью абсцисс; выразить площадь через x_0, y_0 (рис. 21).

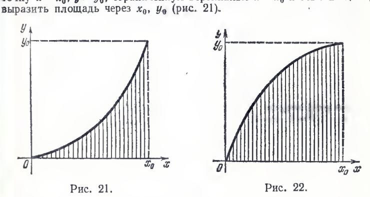


Рис. 21. Рис. 22.

8. То же для параболы, проходящей через начало координат, с горизонтальной касательной в точке (x_0, y_0) (рис. 22).

Указание 1. Ответ можно получить немедленно, пользуясь результатом предыдущего упражнения.

Указание 2. Тем не менее не поленитесь и сделайте все по порядку, без применения остроумия. Уравнение параболы искать в виде $y = kx^2 + nx + m$, величины k, n, m найти из условий прохождения через точки (x_0, y_0) и начало координат и из условия горизонтальности касательной в точке $x = x_0$, $y = y_0$. Площадь выразить через x_0, y_0.

Указание 3. Если не можете выполнить указание 1, то сперва выполните указание 2, результат сам подскажет, как выполнить указание 1.

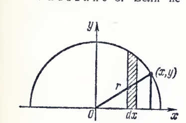


Рис. 23.

9. Написать выражение площади полукруга радиуса r (рис. 23) в виде определенного интеграла.

Указание. Из чертежа по теореме Пифагора

$$x^2+y^2=r^2,$$

это и есть уравнение окружности (см. § 6 главы IV).

10. Найти величину интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле трапеций, взяв $m=5$ и $m=10$. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Замечание. Точное значение этого интеграла есть $\frac{\pi}{4}$. Приближенный подсчет интеграла дает возможность получить приближенное значение числа π.

11. Построить график функции

$$F(x)=\int\limits_a^x y(x)\,dx.$$

Функция $y(x)$ задана графически (рис. 24). Значения a взять равными $a=0$; $a=4$; $a=8$.

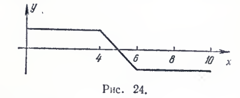


Рис. 24.

12. Построить график функции

$$F(x)=\int\limits_0^x y(x)\,dx.$$

Функция $y(x)$ задана графиками рис. 25.

13. Построить кривые

$$F(x)=\int_0^x \varphi(x)\,dx,$$

где функции $\varphi(x)$ заданы кривыми, приведенными в ответах

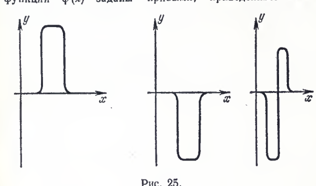


Рис. 25.

к задачам 4 и 5 из § 5 главы I. Сравните $F(x)$ с кривыми $y(x)$, приведенными на стр. 33 рис. 8 и 9.

§ 12. Свойства интегралов

Мы рассматривали выше наиболее простой случай определенного интеграла, с положительной подынтегральной функцией и верхним пределом, который больше нижнего

$$z(n,\ k)=\int_n^k v(t)\,dt, \qquad v>0, \qquad k>n.$$

В этом случае интеграл, очевидно, положителен, так как интеграл равен пределу суммы положительных членов. Интеграл имеет простой физический смысл пройденного пути ($v(t)$ — скорость) или площади ($v=v(t)$ — уравнение кривой).

Каков знак интеграла от отрицательной функции, т. е. в случае $v(t)<0$?

Оставим пока в силе условие $k>n$. В выражении суммы (переходящей в пределе в интеграл) в каждом члене множитель Δt положителен, множитель $v(t)$ отрицателен, каждое слагаемое отрицательно, сумма отрицательна, интеграл также

отрицателен. Итак, если $v(t) < 0$ при $n < t < k$, так что $k > n$, то

$$\int_n^k v(t)\,dt < 0.$$

В случае движения смысл ответа прост: отрицательное значение v означает, что движение происходит в сторону, противоположную положительному направлению, т. е. направлению возрастания координаты z. Путь, пройденный в отрицательном направлении, мы всегда считаем отрицательным. При

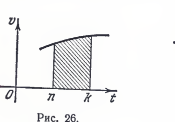


Рис. 26.

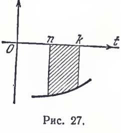


Рис. 27.

таком движении z уменьшается, $z(k) < z(n)$. Так как $\int_n^k v\,dt$ в этом случае отрицателен, то остается в силе общая формула

$$z(k) = z(n) + z(k, n) = z(n) + \int_n^k v\,dt.$$

В случае знакопеременной скорости может случиться, в частности, что $\int_n^k v\,dt = 0$, хотя $k > n$, $k \neq n$; это произойдет, если часть времени от n до k тело двигалось в одну сторону, а другую часть времени — в противоположную и в результате к моменту k вернулось в то положение, в котором оно находилось в момент n.

Обратимся к задаче о площади кривой. При $k > n$ и $v(t) > 0$ интеграл равен площади, ограниченной кривой $v(t)$, осью t и вертикалями $t = n$, $t = k$ (рис. 26). При $v < 0$, $k > n$

$\int\limits_{n}^{k} v\,dt < 0$. В этом случае кривая лежит ниже оси абсцисс (рис. 27).

Значит, для того чтобы сохранить закон, по которому площадь равна интегралу, необходимо считать площадь **отрицательной**, когда кривая лежит ниже оси абсцисс

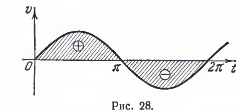


Рис. 28.

Если взять знакопеременную функцию, например, $v(t) = \sin t$, то площадь такой кривой на отрезке, равном периоду от $t = 0$ до $t = 2\pi$, по нашему определению равна нулю (рис. 28). Это значит, что площадь первой полуволны, которую мы считаем положительной, в точности сокращается с отрицательной площадью второй полуволны.

Если поставлена задача: сколько краски нужно для того, чтобы закрасить заштрихованные места на рис. 28, то такое

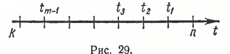


Рис. 29.

определение площади не годится. В этом случае надо разбить весь интеграл на части, в каждой из которых v не меняет знака (в данном случае на две части, от 0 до π и от π до 2π), подсчитать интеграл по каждой части отдельно и сложить абсолютные величины интегралов, относящихся к отдельным частям.

Определенный интеграл обобщается и на случай, когда верхний предел меньше нижнего. В этом случае мы уже не будем говорить о пути, времени и скорости (§ 7), а обратимся к определению интеграла как суммы (см. § 8). Разбивая снова отрезок от n до k (рис. 29) промежуточными

значениями $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$, убедимся, что все Δt теперь отрицательны. Легко убедиться теперь, что

$$\int_n^k v(t)\,dt = -\int_k^n v(t)\,dt, \tag{12.1}$$

так как при любом разбиении отрезка $[n, k]$ соответствующие суммы будут отличаться знаками всех Δt во всех слагаемых.

Существенное свойство интеграла состоит в том, что область интегрирования можно разбить на части: путь, пройденный за время от n (начала) до k (конца), можно представить

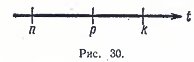


Рис. 30.

как сумму пути, пройденного за время от n до p (промежуточного момента) и от p до k (рис. 30)

$$\int_n^k v(t)\,dt = \int_n^p v(t)\,dt + \int_p^k v(t)\,dt. \tag{12.2}$$

При помощи соотношения (12.1) можно распространить формулу (12.2) и на случай, когда p не лежит внутри промежутка $[n, k]$.

Рис. 31.

Пусть $p > k > n$ (рис. 31). Тогда, очевидно,

$$\int_n^p v(t)\,dt = \int_n^k v(t)\,dt + \int_k^p v(t)\,dt. \tag{12.3}$$

Перенесем последнее слагаемое налево и воспользуемся (12.1)

$$\int_n^p v\,dt - \int_k^p v\,dt = \int_n^p v(t)\,dt + \int_p^k v(t)\,dt = \int_n^k v\,dt. \tag{12.4}$$

Таким образом, мы получили равенство (12.4), в точности совпадающее с (12.2).

Аналогично можно рассмотреть случаи другого расположения чисел n, p, k (их всего шесть вариантов). Читатель легко может рассмотреть их сам и убедиться, что формула (12.2) оказывается верной во всех этих случаях, т. е. независимо от взаимного расположения чисел n, p, k.

Все эти свойства определенных интегралов мы вывели, по существу, из определения интеграла как предела суммы.

Эти свойства следуют также из выражения определенного интеграла через неопределенный интеграл. В самом деле, пусть неопределенный интеграл

$$\int v(t)\,dt = z(t).$$

Тогда

$$\int_n^k v(t)\,dt = z(k) - z(n),$$

$$\int_k^n v(t)\,dt = z(n) - z(k) = -\int_n^k v(t)\,dt.$$

Основной закон о том, что производная от интеграла равна подынтегральной функции, относится к производной по *верхнему* пределу.

Если определенный интеграл рассматривать как функцию его нижнего предела при закрепленном (постоянном) верхнем пределе, мы получим ответ с противоположным знаком:

$$\frac{dz(n,k)}{dn} = \frac{d}{dn}\left(\int_n^k v(t)\,dt\right) = -v(n). \quad (12.5)$$

Рис. 32.

Знак минус в этой формуле легко понять, рассматривая интеграл как площадь: приращение n, очевидно, уменьшает площадь (рис. 32)*). Формально тот же результат можно получить, переставив

*) Площадь, ограниченная вертикальными прямыми $n+\Delta n$, k, кривой и осью x, меньше, чем площадь, ограниченная вертикальными прямыми n, k, кривой и осью x.

пределы (при этом войдет минус) и применяя известный закон о производной по верхнему пределу

$$\frac{d}{dn}\left(\int_n^k v(t)\,dt\right)=\frac{d}{dn}\left(-\int_k^n v(t)\,dt\right)=-v(n).$$

В связи с вопросом о знаке интеграла отметим пример, часто вызывающий недоумение у начинающих. Рассмотрим

$$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}. \qquad (12.6)$$

Это равенство вытекает из найденного ранее значения производной

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}=-\frac{1}{x^2}.$$

Правилен ли знак у интеграла? Может ли быть отрицательным интеграл от положительной функции $\frac{1}{x^2}$? Не противоречит ли этот знак сделанным выше утверждениям?

Все недоумение связано с тем, что формулу (12.6) мы записали неаккуратно. Если написать ее в виде

$$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C,$$

то нельзя говорить о том, что знак интеграла всегда отрицателен, так как это зависит еще от знака и величины C.

В действительности все утверждения о знаке относились к определенному интегралу. Возьмем

$$\int_a^b\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\Big|_a^b=\left(-\frac{1}{b}\right)-\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}.$$

При $b>a$ интеграл положителен, как и должно быть, т. е. формула (12.6) правильна, приводит к правильному результату для определенного интеграла. Забегая вперед, отметим, что с интегралом $\int\frac{dx}{x^2}$ связаны другие, уже не фиктивные, а истинные трудности, которые рассмотрены в § 16 главы II.

§ 13. Средние значения

С помощью интеграла можно дать точное определение среднего для величины, являющейся функцией какой-то переменной.

Если мы имеем величину, принимающую ряд отдельных значений, например m значений

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_m,$$

то среднее значение естественно определить формулой

$$\frac{v_1+v_2+v_3+\ldots+v_m}{m}.$$

Как определить среднее значение функции $v(t)$ переменной t, принимающей все значения в заданном промежутке от n до k $(n<t<k)$?

Представим себе, что $v(t)$ — это мгновенная скорость. Как определить среднее значение $\overline{v}(n,\ k)$, т. е. среднюю скорость за время от n до k? Средняя скорость определяется как отношение пройденного пути к затраченному времени

$$\overline{v}(n,\ k)=\frac{z(n,\ k)}{k-n}=\frac{\int\limits_n^k v(t)\,dt}{k-n}.$$

Это определение среднего значения функции разумно и в тех случаях, когда функция представляет собой не скорость движения, а какую-либо другую величину. Так, например, пусть $y=y(x)$ есть уравнение кривой в плоскости $x,\ y$ (рис. 33).

Рис. 33.

Тогда $\int\limits_a^b y(x)\,dx$ есть площадь под кривой. Формула

$$\overline{y}=\frac{\int\limits_a^b y(x)\,dx}{b-a},\quad (b-a)\overline{y}=\int\limits_a^b y(x)\,dx$$

означает, что $\overline{y}$ есть высота прямоугольника с основанием $b-a$, площадь которого равна площади под кривой. Это значит, что на рис. 33 заштрихованная площадь над линией $y=\overline{y}$, которая отмечена знаком плюс, в точности равна площади, отмеченной знаком минус на участке, где кривая лежит ниже линии $y=\overline{y}$. График функции $y(x)$, если это не прямая, параллельная оси x, обязательно проходит частью ниже и частью выше среднего значения $\overline{y}$, определенного с помощью интеграла. Следовательно, $\overline{y}$ больше наименьшего значения $y(x)$ и меньше наибольшего значения $y(x)$ на участке усреднения $n<x<k$.

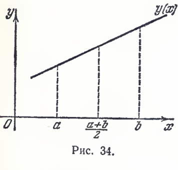


Рис. 34.

Рассмотрим примеры.

Пусть $y(x)$ есть линейная функция

$$y=kx+m.$$

Тогда интеграл представляет собой площадь трапеции, поставленной вертикально (рис. 34) с «высотой» $b-a$, основаниями $y(a)$ и $y(b)$ и средней линией $y\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Следовательно,

$$I(a,\,b)=\frac{y(a)+y(b)}{2}(b-a)=y\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Это выражение легко получить и без геометрических представлений

$$I(a,\,b)=\int_a^b (kx+m)\,dx=\left(\frac{kx^2}{2}+mx\right)\Big|_a^b=$$

$$=\frac{kb^2}{2}+mb-\left(\frac{ka^2}{2}+ma\right)=(b-a)\left(\frac{kb}{2}+\frac{ka}{2}+m\right),$$

$$y(b)=kb+m,\quad y(a)=ka+m,$$

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right)=k\left(\frac{a+b}{2}\right)+m,$$

откуда с очевидностью следуют выражения предыдущей формулы.

Таким образом, для линейной функции

$$\bar{y} = \frac{y(a)+y(b)}{2} = y\left(\frac{a+b}{2}\right). \qquad (13.1)$$

Следовательно, для линейной функции среднее значение функции на данном участке от a до b в точности равно среднему арифметическому значений функции на краях участка $y(a)$ и $y(b)$; другая формулировка: среднее значение линейной функции равно значению функции в середине интервала, т. е. при $x = \frac{a+b}{2}$.

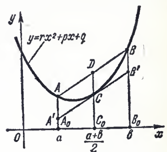


Рис. 35.

Одним из важных примеров линейной зависимости является зависимость скорости от времени при равноускоренном или равнозамедленном движении, т. е. при движении тел под действием постоянной силы, в частности, под действием силы тяжести, когда

$$v = gt + v_0.$$

При расчете пройденного пути используют свойства среднего линейной функции

$$z(n, k) = (k-n)\left(\frac{v(k)+v(n)}{2}\right) = (k-n)\left(\frac{gk+gn}{2} + v_0\right).$$

Следует иметь в виду, однако, что при другой, не линейной, зависимости выражения для среднего (13.1) уже несправедливы.

Рассмотрим пример квадратичной функции (параболы) $y = rx^2 + px + q$. Для определенности возьмем $r > 0$ и рассмотрим какой-то отрезок параболы $a < x < b$. Из чертежа (рис. 35) видно, прежде всего, что

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{y(a)+y(b)}{2}.$$

Действительно, $y\left(\frac{a+b}{2}\right)$ есть ордината точки C, лежащей

а кривой, а полусумма $\frac{y(a)+y(b)}{2}$ есть ордината точки D, лежащей на середине хорды, соединяющей точки кривой A и B, и ясно из чертежа, что C лежит ниже D*).

Обратимся теперь к интегралу $\int\limits_a^b y(x)\,dx$, т. е. к вычислению площади под кривой. Очевидно, что эта площадь меньше площади трапеции с основаниями A_0A и B_0B. С другой стороны, если через точку C провести касательную к кривой, то эта касательная пересечет вертикали в точках A' и B' и образует трапецию со средней линией C_0C; площадь этой трапеции, очевидно, меньше площади под кривой. Таким образом, в случае параболы с $r>0$

$$(b-a)\,y\left(\frac{a+b}{2}\right)<\int\limits_a^b y(x)\,dx<(b-a)\,\frac{y(a)+y(b)}{2}.$$

Соответственно получаются неравенства для среднего значения $\bar{y}$ в промежутке от a до b:

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right)<\bar{y}<\frac{y(a)+y(b)}{2}.$$

Для квадратичной функции имеет место точная формула (приводим ее без вывода, см. упражнение 4), справедливая при любом знаке r:

$$\bar{y}=\frac{2}{3}\,y\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{y(a)+y(b)}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\,y(a)+\frac{2}{3}\,y\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{6}\,y(b). \quad (13.2)$$

Это выражение является хорошей приближенной формулой для расчета площади под любой плавной кривой (см. упражнения 6 и 7). Пользование средними практически очень удобно, часто даже удобнее пользования интегралами.

---

*) Напомним, что парабола $y=rx^2$, $r>0$ выпукла книзу, а парабола $y=rx^2+px+q$ с любыми p и q получается из параболы $y=rx^2$ параллельным переносом, см. главу IV, § 5.

По существу, эти величины равноценны, — зная интеграл $I=\int_a^b y\,dx$, находим среднее как $\overline{y}=\frac{I}{b-a}$, а вычислив среднее, так же легко находим интеграл $I=(b-a)\overline{y}$.

Удобство среднего заключается в том, что это величина $\overline{y}$ той же размерности, что и y, и, очевидно, того же порядка величины, что и значения y на исследуемом участке. Поэтому труднее пропустить ошибку в 10 раз в значении $\overline{y}$, чем такую же ошибку в значении интеграла.

Обычно предполагается, что изучающие высшую математику в совершенстве знают арифметику и алгебру и никогда не ошибаются в 10 раз или в знаке. Опыт показывает, что это не так! Поэтому и расчеты всегда надо вести так, чтобы уменьшить вероятность незамеченной ошибки.

Упражнения

1. Найти среднее значение $y=x^2$ на участке от 0 до 2.
2. Сравнить это среднее значение со средним арифметическим значений функции на краях и со значением в середине промежутка.
3. Проверить формулу (13.2) для среднего по данным упражнения 1.
4. Проверить формулу для среднего (13.2) в общем виде для параболы $y=rx^2+px+q$.
5. Сила тяжести убывает с расстоянием от центра Земли как $F=\frac{A}{r^2}$. Найти с помощью интеграла среднее значение силы тяжести на участке от поверхности Земли (радиус R) до расстояния R от поверхности Земли, т. е. $2R$ от центра Земли.
6. Сравнить точное значение среднего в предыдущем упражнении со средним арифметическим на краях участка.
7. Сравнить точное значение среднего в упражнении 5 со средним по формуле (13.2), относящейся к параболе.

§ 14. Различные примеры производных и интегралов

В предыдущих параграфах мы рассматривали соотношение между путем и скоростью, соотношение между уравнением кривой и площадью под этой кривой. Эти соотношения представляют собой конкретные вопросы, на почве которых исторически сложились дифференциальное и интегральное исчисления. Но понятия интеграла и производной применимы,

конечно, не только к перечисленным вопросам, а к чрезвычайно широкому кругу явлений, к самым различным областям науки, техники, жизни. В сущности говоря, интеграл и производная представляют собой определенный язык, наиболее приспособленный для описания природы.

Учащийся, начинающий изучение иностранного языка, чтобы привыкнуть к нему, повторяет похожие простые фразы: «на столе стоит стакан», «на столе стоит хлеб», «на полу сидит кошка», «на полу сидит мышка». Вот так же в начале изучения высшей математики надо на многих похожих примерах повторять соотношения между производной и интегралом. Сперва надо научиться иностранному языку, а уже потом высказывать на этом языке определенные мысли, желания, утверждения. Так и мы сперва научимся выражать хорошо известные соотношения и формулировать задачи на языке высшей математики, а уже потом будем решать эти задачи и получать новые результаты *).

Приведем несколько типичных примеров.

А) Производные по времени

1. Представим себе сосуд произвольной формы, из которого вытекает жидкость (рис. 36). Масса жидкости, находящейся в данный момент в сосуде, равна M. Эта величина есть функция времени $M(t)$. Жидкость собирается в другом сосуде, количество ее во втором сосуде $m(t)$. Количество жидкости, вытекающей из сосуда в единицу времени, обозначим $W(t)$. Эта величина имеет размерность *г/сек*. Величины m, M и W связаны между собой соотношениями

$$\frac{dM}{dt} = -W(t); \quad \frac{dm}{dt} = +W(t). \quad (14.1)$$

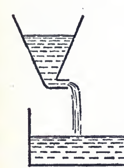


Рис. 36.

Те же соотношения можно написать в интегральном виде. При этом зададим-

*) Гёте говорил: «Математики — это род французов: стоит им что-либо сказать, как они сразу переводят сказанное на свой язык — и это оказывается совсем не тем, что Вы первоначально имели в виду».

ся тем, что в некоторый начальный момент t_0 в первом сосуде количество жидкости равнялось $M(t_0) = M_0$, а второй сосуд был пуст: $m(t_0) = 0$. Тогда

$$m(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} W(t)\,dt,$$

$$M(t_1) = M(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} W(t)\,dt. \qquad (14.2)$$

Обращаем внимание на то, что если нас интересует количество жидкости в определенный момент t_1, то оно выражается через интеграл, в котором переменная интегрирования t пробегает все значения от t_0 до t_1.

Если мы хотим написать выражения для $m(t)$ и $M(t)$, то для большей ясности удобно было бы переименовать переменную интегрирования (пользуясь тем, что она немая), назвав ее, например, τ (τ — тау — греческая буква, соответствующая латинской t — тэ). Тогда

$$m(t) = \int_{t_0}^{t} W(\tau)\,d\tau,$$

$$M(t) = M(t_0) - \int_{t_0}^{t} W(\tau)\,d\tau. \qquad (14.3)$$

Обычно же пишут просто

$$m(t) = \int_{t_0}^{t} W(t)\,dt,$$

$$M(t) = M(t_0) - \int_{t_0}^{t} W(t)\,dt, \qquad (14.4)$$

но надо помнить, что t, стоящее под интегралом, имеет другой смысл, чем аргумент t в $M(t)$ и $m(t)$, который совпадает с t на верхнем пределе. В этом отношении запись (14.2) и (14.3) точнее, чем (14.4).

Написанные выше формулы соответствуют опыту, в котором в различные моменты времени измеряется M и поток жидкости W.

Часто задача ставится так: W — расход жидкости — зависит известным образом от ее давления, т. е. от высоты

столба жидкости h. В свою очередь при данной форме сосуда величина h зависит от M. Таким образом, известен расход W как функция от количества жидкости, находящейся в сосуде,

$$W = W(M).$$

Тогда равенство (14.1) приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = -W(M).$$

Это есть дифференциальное уравнение. Решение таких уравнений будет рассмотрено в главе V. Формул вида (14.2)—(14.4) в этом случае уже писать нельзя, так как W как функция времени не задана.

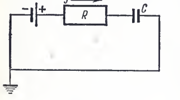


Рис. 37.

2. Рассмотрим конденсатор (рис. 37). Накопленный в нем заряд (количество электричества) обозначим q. В технической системе единиц q измеряется в кулонах. Электрический ток j, протекающий по проводу, представляет собой количество электричества, протекающее в единицу времени, измеряется в технической системе в амперах. Один ампер есть ток в один кулон в одну секунду.

Заряд конденсатора *) и ток связаны между собой равенством

$$\frac{dq}{dt} = j \tag{14.5}$$

(положительное направление тока показано стрелкой). Если задано или известно в результате измерения, как изменяется ток в зависимости от времени, то можно написать интегральное соотношение

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} j(t)\, dt.$$

Если дана емкость конденсатора C, то падение напряжения

*) Зарядом конденсатора будем называть количество положительного электричества на левой пластине конденсатора C на рис. 37, выраженное в кулонах.

на конденсаторе можно выразить через q: $\varphi_C = \frac{q}{C}$. Падение напряжения на сопротивлении R равно

$$\varphi_R = E_0 - \varphi_C = E_0 - \frac{q}{C},$$

где E_0 — напряжение батареи. По закону Ома ток через сопротивление равен $j = \frac{1}{R}\left(E_0 - \frac{q}{C}\right)$, и, пользуясь (14.5), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{R}\left(E_0 - \frac{q}{C}\right).$$

Подробно задачи с конденсатором рассмотрены в главе VIII.

3. Понятие ускорения. Выше мы рассматривали скорость движения как производную от координаты по времени. Но после того как мгновенная скорость v найдена и известна зависимость мгновенной скорости от времени $v(t)$, можно поставить вопрос о том, как с течением времени меняется скорость.

Производная скорости по времени называется ускорением

$$\frac{dv}{dt} = a \tag{14.6}$$

и обозначается обычно a (acceleration — ускорение по-французски; сравни название «акселератор» педали, регулирующей подачу воздуха в автомобильный двигатель).

Так как размерность скорости *см/сек* или *м/сек*, то размерность ускорения *см/сек*^{2} или *м/сек*^{2}.

Если известно ускорение как функция времени, то мгновенное значение скорости можно записать в виде интеграла

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt. \tag{14.7}$$

Например, в случае движения под действием земного тяготения $a = -g$, где $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2} (знак минус связан с тем, что положительным считаем направление вверх). Полагая в (14.7) $a = -g$, получаем:

$$v(t) = v(t_0) - \int_{t^0}^{t} g\,dt = v(t_0) - (t - t_0)\,g.$$

Запишем скорость в виде производной от пути по времени $v=\frac{dz}{dt}$ и подставим в (14.6). Тогда

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Такая величина — производная от производной — называется второй производной и обозначается

$$a=\frac{d^2z}{dt^2}$$

и читается: «де-два-зет по де-тэ-квадрат».

Заметим, как разумно поставлены показатели (двойки) в выражении $\frac{d^2z}{dt^2}$. Размерность ускорения именно $\frac{z}{t^2}$, отбрасывая безразмерные знаки d, получаем правильную размерность второй производной.

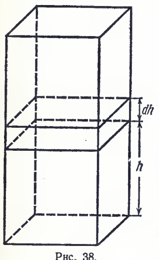


Рис. 38.

Б) Производные по координате

4. Мысленно выделим в атмосфере вертикальный столб воздуха с постоянным сечением S *см*². Плотность воздуха*) ρ *г/см*³ зависит от высоты h над поверхностью Земли. Объем тонкого слоя, заключенного между h и $h+dh$ (рис. 38), равен $S\,dh$. Внутри этого тонкого слоя плотность $\rho(h)$ можно считать неизменной — именно для этого слой и брался тонким. В данном примере dh можно представить себе в 1 *м* или 10 *м*, даже (с несколько меньшей точностью) как 100 *м*, поскольку при изменении высоты на 1 *км* плотность воздуха меняется на 12—14%.

*) ρ — греческая буква, читается: «ро». Часто применяемое в школьной физике обозначение d (происходящее от французского densité — плотность) весьма неудобно, так как его можно было бы перепутать со знаком дифференциала.

Масса воздуха в слое dh равна $dm = \rho S dh$. Масса воздуха в столбе, простирающемся от h_1 до h_2, определяется интегралом

$$m(h_1, h_2) = S \int_{h_1}^{h_2} \rho(h)\, dh.$$

Масса воздуха в столбе от поверхности Земли ($h = 0$) до высоты h

$$m(0, h) = S \int_{0}^{h} \rho(h)\, dh.$$

Масса воздуха, находящегося выше заданной высоты h, равна

$$m = S \int_{h}^{\infty} \rho(h)\, dh\,^{*)}.$$

Давление P на некоторой высоте h, умноженное на площадь S, равно силе, с которой притягивается к земле весь столб воздуха, находящийся выше высоты h. Сила тяготения равна массе, помноженной на ускорение силы тяжести g, откуда

$$P(h) = \int_{h}^{\infty} g\rho(h)\, dh.$$

Пользуясь формулой (12.5), получим отсюда:

$$\frac{dP}{dh} = -g\rho(h).$$

Эту формулу можно было бы написать и сразу, рассматривая равновесие тонкого слоя dh, на который снизу действует давление $P(h)$, сверху давление $P(h+dh)$, равнодействующая этих двух сил уравновешивает притяжение к земле массы, заключенной в слое.

---

*) Знак ∞ на верхнем пределе заменяет очень большое число h, такое, что при его дальнейшем увеличении величина интеграла практически не меняется.

5. Выразим в виде интеграла объем тела (рис. 39). Разобьем тело плоскостями $x = \text{const}$ на тонкие слои. Объем dV тонкого слоя равен произведению площади сечения S на толщину слоя dx. Таким образом, если известна площадь сечения тела вертикальной

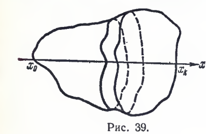


Рис. 39.

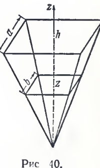


Рис 40.

плоскостью в зависимости от координаты сечения x, то объем тела может быть вычислен по формуле

$$V = \int_{x_0}^{x_k} S(x)\,dx. \tag{14.8}$$

Применим эту формулу к правильной четырехугольной пирамиде. Поставим ее на вершину в начале координат с осью симметрии, направленной по оси z (рис. 40). Пусть высота пирамиды h, основание ее (оказавшееся сверху) представляет собой квадрат со стороной a. Из геометрии известно, что сечение пирамиды горизонтальной плоскостью на высоте z представляет собой также квадрат, сторона b которого относится к a, как z к h,

$$b = b(z) = a\frac{z}{h}.$$

Следовательно, площадь сечения $S(z) = b^2 = \frac{a^2}{h^2}z^2$. Объем пирамиды

$$V = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} z^2\,dz = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h z^2\,dz.$$

Воспользуемся результатом § 11

$$\int z^2\,dz = \frac{1}{3}z^3, \quad \int\limits_0^h z^2\,dz = \frac{1}{3}h^3.$$

Тогда получим выражение объема пирамиды

$$V = \frac{a^2}{h^2}\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}a^2h.$$

Объем пирамиды равеи одной трети произведения площади осиоваиия иа высоту пирамиды. Вывод этой формулы в стереометрии без примеиения интегралов значительио сложиее.

Упражнение

Вывести формулу для объема произвольной пирамиды, используя свойства параллельных сечений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В главе I рассмотреиы поиятия производной и интеграла, иекоторые их самые простые свойства и связь между интегралом и производиой. Вопросы практического вычислеиия производных и интегралов от различных функций отнесеиы в главу II книги. В главе I дано только иесколько самых простых примеров.

Хочется посоветовать учащемуся ие измерять трудность и значение того или иного раздела числом формул, их сложностью и громоздкостью. В действительиости самое важное и трудное — именно математическая формулировка задачи в виде алгебраического уравнеиия или интеграла или дифференциальиого уравнения. Именно иа это надо обратить особое внимание.

Если последние три параграфа показались читателю трудными, целесообразно еще раз перечесть всю главу I.

По собственному опыту автор знает, что те работы, которые ему не удалось сделать (которые тем временем были сделаны другими!), не были им сделаны потому, что, ограиичиваясь общим размышлением, автор ие находил смелости писать уравнеиия, математически формулировать задачу; вычислительные трудности в четко поставлениой задаче с ясным физическим содержанием всегда преодолеваются, если ие точным расчетом, то приближенными методами.

ГЛАВА II

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. Знак дифференциала. Производная суммы функций

Удобные наглядные способы записи соотношений и простые правила, позволяющие механически, без размышлений и без ошибок, проводить вычисления, имеют очень большое значение и для обучения и для самого развития математики.

В главе I был разобран смысл понятия производной. Задачей главы II является изложение правил нахождения производных от различных функций: многочленов, рациональных функций, в которые входят отношения многочленов, корней и вообще дробных степеней, показательной функции, тригонометрических функций и др. Нужно найти общие правила для производных различных сочетаний функций: суммы функций, произведения функций, сложной функции. В конце главы II (стр. 165) приведена таблица производных для ряда функций, подытоживающая нижеследующие §§ 1—12.

Из определения производной следует такой способ действия: в каждом случае нужно задаться каким-то значением x и приращением Δx; найти $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$, найти приращение Δf; составить отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и после этого перейти к пределу $\Delta x \to 0$.

Однако формула, дающая общее выражение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при произвольном Δx (не стремящемся к нулю), как правило, бывает сложнее формулы для предела, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$, т. е. производной. Поэтому в дальнейшем мы часто будем писать такие формулы, которые справедливы только в пределе,

при приращении, стремящемся к нулю, и в этом случае вместо Δy, Δx будем писать dy, dx. Нужно выработать такие правила действий с величинами dy, dx, чтобы имело место основное равенство

$$\frac{dy}{dx}=y'(x),$$

т. е. чтобы отношение дифференциалов тождественно равнялось производной. Раньше мы писали приближенное выражение для приращения функции

$$y(x+\Delta x)-y(x)=\Delta y\approx y'(x)\cdot\Delta x.$$

Это выражение становится точным в пределе при $\Delta x\to 0$ *). Для дифференциалов будем писать точное равенство

$$dy=y'(x)\,dx.$$

Слова о пределе при $\Delta x\to 0$, которые нужно было добавлять к приближенному равенству $\Delta y\cong y'(x)\cdot\Delta x$, уже не нужны при написании второй формулы: они подразумеваются при пользовании дифференциалами dy, dx.

Правила пользования дифференциалами должны быть такими, чтобы отношение дифференциалов равнялось производной; для этого в формулах нужно сразу отбрасывать члены, пропорциональные $(dx)^2$ и более высоким степеням dx.

Рассмотрим простейший пример $y=x^2$, и на этом примере сравним технику работы с приращениями и с дифференциалами: раньше мы писали

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x;\quad y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x.$$

С помощью дифференциалов запишем:

$$dy=(x+dx)^2-x^2=2x\,dx.$$

Член $(dx)^2$ в правой части мы сразу отбросили!

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=2x.$$

В качестве второго примера рассмотрим сумму двух функций, взятых с постоянными коэффициентами

$$y=Cf(x)+Eg(x).$$

*) См. сноску на стр. 24.

С помощью дифференциалов запишем:

$$dy = y(x+dx) - y(x) =$$
$$= Cf(x+dx) + Eg(x+dx) - Cf(x) - Eg(x) =$$
$$= C[f(x+dx) - f(x)] + E[g(x+dx) - g(x)] =$$
$$= C\,df + E\,dg = Cf'dx + Eg'dx,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = Cf' + Eg'.$$

Читатель легко может получить такую же формулу, пользуясь приращениями и пределами.

Написание dx, dy (читается: дифференциал икс, дифференциал игрек) заменяет слова о пределе и упрощает вид формул. Общее правило заключается в том, что при написании формул с дифференциалами можно (и должно) выкидывать члены, пропорциональные $(dx)^2$, $(dx)^3$ и т. д. В остальном же с дифференциалами можно обращаться как с обычными алгебраическими величинами.

Мы будем пользоваться дифференциалом той или иной переменной dx, dt и т. п., дифференциалом функции df, дифференциалом какого-либо сложного выражения, составленного из нескольких функций, например $d\left(\frac{f^2}{g}\right)$. Отношение $\frac{df}{dx}$ по определению есть производная функция от $f(x)$.

§ 2. Производная обратной функции

Задание y как функции x означает, что каждому x соответствует определенное значение y. Значит, и обратно, можно сказать, что каждому определенному y соответствует свое x. Таким образом, задание $y(x)$ дает также функциональную зависимость $x(y)$. Эту зависимость называют обратной функцией.

Приведем несколько примеров: слева дано $y(x)$, справа написана обратная функция x от y:

$$y = x + a; \qquad x = y - a;$$
$$y = x^2; \qquad x = \sqrt{y};$$
$$y = x^3 + 1; \qquad x = \sqrt[3]{y-1}.$$

Во многих случаях обратная функция имеет более простой вид, чем прямая функция: например, если прямая функция $y=\sqrt[3]{x-1}$ содержит кубичный корень, то обратная функция $x=y^3+1$ есть степенная функция, проще прямой. В этом случае найти производную обратной функции, $\frac{dx}{dy}$, оказывается проще и легче, чем найти производную прямой функции, $\frac{dy}{dx}$. Нельзя ли в этом случае производную прямой функции как-то выразить через производную обратной функции?

Для прямой функции $y(x)$ имеем:

$$dy=\frac{dy}{dx}\,dx=y'(x)\,dx.$$

Отсюда получим ответ для производной $x'(y)$ обратной функции $x(y)$:

$$x'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'(x)}. \tag{2.1}$$

В правой части (2.1) стоит выражение, записанное в виде функции x, а именно, с помощью $y'(x)$. Но если обратная функция $x(y)$ известна, то это выражение можно представить как функцию y.

Поясним сказанное примерами. Первый пример (линейная функция) слишком прост. Начнем со второго примера

$$y=x^2,\ \frac{dy}{dx}=y'(x)=2x;\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{2x}. \tag{2.2}$$

Подставляем в выражение (2.2) обратную функцию $x=\sqrt{y}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d(\sqrt{y})}{dy}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}. \tag{2.3}$$

Раньше, в главе I, этот результат был получен более сложным путем.

Третий пример:

$$y=x^3+1,\ \frac{dy}{dx}=y'(x)=3x^2;\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{3x^2};$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d(\sqrt[3]{y-1})}{dy}=\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}=\frac{1}{3}(y-1)^{-\frac{2}{3}}.$$

Такой способ пригодится нам и позже. Когда мы изучим показательную функцию a^x, то можно будет рассматривать логарифмическую функцию как обратную; когда мы изучим производные тригонометрических функций, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, то можно будет найти производные обратных тригонометрических функций — $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.

§ 3. Сложная функция

Пусть z задано как функция y, например $z=\frac{1}{y}$, а y есть функция x, например $y=x^2+5$. Очевидно, каждому x соответствует определенное y, а так как каждому y соответствует определенное z, то в конце концов каждому x соответствует определенное z, z есть функция x. Всегда можно, подставляя выражение y через x, выписать непосредственно $z(x)$, в данном примере $z=\frac{1}{x^2+5}$.

Но для наших целей как раз выгоднее все функции свести к сочетаниям самых простых функций; в отдельности каждая из зависимостей $z=\frac{1}{y}$ и $y=x^2+5$ проще, чем $z=\frac{1}{x^2+5}$.

Сводя все функции к самым простым функциям, мы сумеем обойтись правилами нахождения производных этих простых функций.

Найдем дифференциал сложной функции $z[y(x)]$. Рассматривая z как функцию y, напишем:

$$dz=\frac{dz}{dy}\cdot dy.$$

Но y есть функция x; поэтому

$$dy=\frac{dy}{dx}\cdot dx.$$

Подставляя, получим:

$$dz=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot dx. \qquad (3.1)$$

Поделив обе части (3.1) на dx, получим правило определе-

иня производной сложной функции *)

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (3.2)$$

Внд формулы вполне соответствует тому, что было сказано о возможностн обращеиия с дифференцналами как с обычнымн алгебраическнмн величинамн: в пронзведении $\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ можно сократнть dy.

Напомннм, что z задано как функция y, поэтому $\frac{dz}{dy}$ также является фуикцией y. Но так как само y есть функция x, то, подставляя $y=y(x)$ в выраженне $\frac{dz}{dy}$, получим $\frac{dz}{dy}$ как функцию x, а следовательно, и $\frac{dz}{dx}$ как функцню x.

Проделаем расчет для случая, который понадобнтся в дальнейшем. Пусть

$$z=\frac{1}{y(x)}.$$

Мы знаем, что прн $z=\frac{1}{y}$ $\frac{dz}{dy}=-\frac{1}{y^2}$. Значит,

$$dz=-\frac{1}{y^2}\,dy=-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx$$

и

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (3.3)$$

Так, например, еслн $y=x^2+5$, $z=\frac{1}{x^2+5}$, то

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{(x^2+5)^2}\cdot\frac{d(x^2+5)}{dx}=-\frac{2x}{(x^2+5)^2}.$$

---

*) Раньше для обозначения производиой наряду с записью $\frac{dz}{dx}$ мы употребляли запись z'. Однако обозначеиие производиой штрихом может привести к неясностям: еслн напнсать z', неясио, что имеется в виду: $\frac{dz}{dx}$ или $\frac{dz}{dy}$. Поэтому в тех случаях, где может возникиуть сомнеиие, мы штрих употреблять не будем.

Это правило составления производной сложной функции сохраняется и при многоступенчатой зависимости

$$\left.\begin{aligned} &z=z(y),\ y=y(x),\ x=x(t),\ t=t(w),\\ &\frac{dz}{dw}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{dw}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Если функция задана параметрически (см. главу IV, § 8), то такое задание можно рассматривать как частный случай сложной функции. В самом деле, если дано

$$x=f(t), \qquad y=g(t),$$

то первое из этих уравнений можно рассматривать как уравнение, решение которого даст $t(x)$; подставляя это $t(x)$ во второе уравнение, получим:

$$y=g(t)=g(t(x)).$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}.$$

Но для применения этой формулы не обязательно выражать t как функцию x (если бы мы это сделали, то избавились бы от параметра, а это не всегда возможно). Достаточно знать $x=f(t)$. Эта функция является обратной по отношению к функции $t(x)$. Значит,

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{df}{dt}}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Эта формула дает еще один пример того, что с дифференциалами можно обращаться как с обычными алгебраическими величинами: величина dt в правой части сокращается.

Приводим пример:

$$x=t^2-t; \qquad y=t^2+t;$$

$$\frac{dx}{dt}=2t-1; \quad \frac{dy}{dt}=2t+1; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2t+1}{2t-1}.$$

Таким образом, когда мы будем вычислять таблицу для построения графика и, задаваясь t, находить x и y, мы сможем в любой точке находить и значение производной $\frac{dy}{dx}$, дающее наклон касательной в этой точке.

Упражнения

1. Найти производную от $z=(ax+b)^2$ как сложной функции $y=ax+b$. Раскрыть скобки и найти ту же производную.
2. Найти производную

$$z=\frac{1}{ax+b}, \quad z=\frac{1}{(ax+b)^2}, \quad z=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

§ 4. Производная произведения функций

Найдем производную произведения двух функций: $g(x)$ и $h(x)$. Положим

$$f(x)=g(x)\,h(x),$$
$$df=f(x+dx)-f(x)=g(x+dx)\,h(x+dx)-g(x)\,h(x).$$

Но

$$g(x+dx)=g(x)+dg,$$
$$h(x+dx)=h(x)+dh.$$

Поэтому

$$df=[g(x)+dg][h(x)+dh]-g(x)\,h(x)=$$
$$=g(x)\,h(x)+g(x)\,dh+h(x)\,dg+dg\,dh-g(x)\,h(x)=$$
$$=g(x)\,dh+h(x)\,dg+dg\,dh.$$

Заметим, что

$$dg=g'(x)\,dx,$$
$$dh=h'(x)\,dx,$$

откуда

$$dh\,dg=g'(x)\,h'(x)\,(dx)^2.$$

Величина $dh\,dg$ пропорциональна $(dx)^2$, поэтому произведением $dh\,dg$ в выражении df пренебрегаем. Окончательно получаем:

$$df=g(x)\,dh+h(x)\,dg. \tag{4.1}$$

Разделив все члены (4.1) на dx, получим:

$$\frac{df}{dx}=\frac{d(gh)}{dx}=g\frac{dh}{dx}+h\frac{dg}{dx}. \qquad (4.2)$$

Это выражение надо запомнить так: производная произведения gh равна сумме производной, взятой в предположении, что зависит от x только h, а g постоянно $\left(\text{член } g\frac{dh}{dx}\right)$, и производной, взятой в предположении, что h постоянно, а от x зависит только g $\left(\text{член } h\frac{dg}{dx}\right)$. При этом, естественно, само постоянное значение g в члене $g\frac{dh}{dx}$ берется при том x, при котором ищется значение производной. То же относится и к h во втором члене.

Как бы мы действовали старым способом? Простая алгебра дает точное равенство

$$\Delta f=g(x)\cdot\Delta h+h(x)\cdot\Delta g+\Delta h\cdot\Delta g.$$

Поделим обе части на Δx:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=g(x)\cdot\frac{\Delta h}{\Delta x}+h(x)\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}+\frac{\Delta h}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot\Delta x. \qquad (4.3)$$

Заметим, что в последнем члене для удобства мы умножили и разделили на Δx. До сих пор все равенства являются точными, справедливыми при любых значениях Δx. Теперь переходим к пределу при $\Delta x\to 0$. При этом

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x}=h', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=g'$$

и в силу (4.3)

$$f'=gh'+hg'.$$

Последний член в формуле (4.3) при переходе к пределу исчез, так как первые два множителя в пределе дают произведение $h'\cdot f'$, а Δx мы устремили к нулю.

С помощью приращений и перехода к пределу получен тот же результат, что и с помощью дифференциалов, но несколько более долгим способом. Это не удивительно, так как в случае дифференциалов мы отбросили $df\cdot dg$ механически, на основании ранее заученного правила, согласно которому надо отбрасывать члены с $(dx)^2$, $(dx)^3$ и т. д.,

а значит, и любые произведения двух, трех и большего числа дифференциалов.

При расчете с помощью приращений мы, в сущности, по ходу дела *доказали* это правило еще раз для примера произведения функций.

Последовательные действия с помощью приращений нужны для обоснования правил и понимания их. Но, после того как понимание достигнуто, пользование дифференциалами быстрее ведет к цели, является более деловым; было бы смешно каждый раз танцевать от печки, каждый раз, решая конкретную задачу, выписывать, что производная есть предел отношения, и т. д.

Пример. $f=(2x^2+5)(3x+4)$.

Найти $f'(x)$ и, в частности, $f'(2)$. Здесь

$$g=2x^2+5; \quad \frac{dg}{dx}=4x;$$

$$h=3x+4; \quad \frac{dh}{dx}=3;$$

$$\frac{df}{dx}=(2x^2+5)\cdot 3+(3x+4)\cdot 4x;$$

$$f'(2)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2}=(2\cdot 4+5)\cdot 3+(3\cdot 2+4)\cdot 4\cdot 2= \\ =39+80=119.$$

Правило для нахождения производной произведения обобщается на случай нескольких множителей. Например, для произведения четырех функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ получаем:

$$\frac{d(fghk)}{dx}=fgh\frac{dk}{dx}+fgk\frac{dh}{dx}+fhk\frac{dg}{dx}+ghk\frac{df}{dx}. \qquad (4.4)$$

Производную частного (отношения) двух функций найдем, записав $f=\frac{h}{g}$ в виде произведения

$$f=h\frac{1}{g}.$$

Тогда

$$f'=h\left(\frac{1}{g}\right)'+h'\,\frac{1}{g}, \qquad (4.5)$$

Производиую функции $\frac{1}{g}$ находим, пользуясь формулой (3.3),

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2} g'.$$

Подставляя это в (4.5), получим:

$$f' = \left(\frac{h}{g}\right)' = -\frac{h}{g^2} g' + h' \frac{1}{g}$$

или

$$\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h'g - hg'}{g^2}. \tag{4.6}$$

Правило, согласно которому производную произведения иескольких функций можно найти как сумму производных, вычисленных в предположении, что каждый раз меняется только одна функция, в действительности применимо не только к произведению функций, но и к другим выражениям. Легко убедиться, что формула для производной суммы функций также согласуется с этой формулировкой.

Позже мы увидим, что та же формулировка применима и к таким случаям, как, например, $g(x)^{h(x)}$, где функция g возводится в степень h, зависящую от x.

Упражнения

1. Найти производную функции $y = x^4$, записав $x^4 = x^2 x^2$.

Найти производные функций:

2. $y = (2x^2 + x)\sqrt{x}$. 3. $y = \frac{x^3 + 5x^2}{x+1}$. 4. $y = \frac{x-1}{x^2+2}$.

§ 5. Степенная функция

Рассмотрим производную степенной функции

$$y = x^n,$$

где n есть постоянное число. При n целом положительном x^n есть произведение n одинаковых множителей

$$y = \overbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}^{n \text{ раз}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{1 \cdot x^{n-1} + 1 \cdot x^{n-1} + \ldots + 1 \cdot x^{n-1}}^{n \text{ раз}}$$

(по формуле типа (4.4)), откуда *)

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

Покажем, что эта формула имеет место при любом n (дробном, отрицательном).

При дробном n запишем $n=\frac{m}{p}$, где числа m и p — целые.

Получим $y=x^{\frac{m}{p}}$, или

$$y^p=x^m. \qquad (5.1)$$

Выражение y^p в левой части (5.1) является сложной функцией от x, так как y зависит от x. Поэтому, вычисляя производную от обеих частей равенства (5.1), получим

$$\frac{d}{dx}(y^p)=py^{p-1}\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{p}\frac{x^{m-1}}{y^{p-1}}=\frac{m}{p}\frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{p}}\right)^{p-1}}=\frac{m}{p}\frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{p}}}=\frac{m}{p}x^{\frac{m}{p}-1}.$$

Учитывая, что $\frac{m}{p}=n$, получаем окончательно:

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

При отрицательном показателе запишем $n=-k$, где k — положительное число,

$$y=x^n=x^{-k}=\frac{1}{x^k}.$$

По правилу определения производной сложной функции $y=\frac{1}{f}$, $f=x^k$ найдем:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f^2}\frac{df}{dx}=-\frac{1}{x^{2k}}kx^{k-1}=-kx^{-k-1}.$$

*) Для целого n эту формулу можно получить при помощи бинома Ньютона. Однако производная легко находится и без бинома, его знание не обязательно.

Подставляя обратно $k = -n$, получим и для отрицательного n

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Таким образом, формула производной от степени применима при любом рациональном показателе n. Она распространяется и на случай иррационального показателя степени.

Формула эта имеет важнейшее значение. При всей ее простоте эту формулу полезно записать еще в другом виде:

$$y = cx^n, \quad \frac{dy}{dx} = n\frac{y}{x}. \tag{5.2}$$

Этот результат надо глубоко прочувствовать. При положительных n степенная функция обладает очевидным свойством, что при $x = 0$ y также равно 0. Кривую $y = cx^n$ при данном $n > 0$ можно провести через любую точку (x_0, y_0) — достаточно выбрать $c = y_0/x_0^n$. Пусть кривая проходит через начало координат и через точку (x_0, y_0). Найдем среднее значение производной на участке кривой от начала координат до точки (x_0, y_0). Согласно определению среднего (см. выше главу I, § 13)

$$\overline{y'} = \frac{\int_0^{x_0} y'(x)\,dx}{x_0 - 0},$$

откуда, пользуясь формулой (11.9) из главы I, получаем

$$\overline{y'} = \frac{y(x_0) - y(0)}{x_0} = \frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}.$$

В самом деле, при изменении x от 0 до x_0 y растет от 0 до y_0. Значит, средняя скорость роста y (т. е. среднее значение производной) равна y_0/x_0, это очевидно и без интегралов!

Как видно из формулы (5.2), значение производной в точке (x_0, y_0) в n раз (n — показатель степени) отличается от среднего значения производной. На рис. 41 показано несколько кривых с различными n: $n = \frac{1}{2}$, 1, 2, 5, проходя-

щих через одну и ту же точку $N(x_0, y_0)$, а значит, имеющих равную среднюю производную на отрезке $0-x_0$. Наглядно видно, что чем больше n, тем больше производная в точке N (круче растет кривая). Вернемся еще раз к формуле (5.2)

$$\frac{dy}{dx} = n\frac{y}{x}.$$

Отсюда $dy = n\frac{y}{x}dx$, и потому для малых приращений

$$\Delta y = n\frac{y}{x}\Delta x. \qquad (5.3)$$

Будем считать, что соотношение (5.3) достаточно точно для $\Delta x = 0{,}01\,x$, т. е. для изменения аргумента на 1%. Тогда из (5.3) получаем:

$$\Delta y = n\frac{y}{x}\,0{,}01\,x$$

или

$$\Delta y = n\,0{,}01\,y.$$

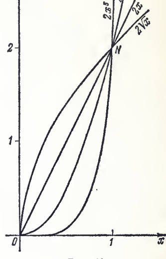


Рис. 41.

При изменении аргумента на 1% степенная функция с показателем n меняется на $n\%$.

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y = x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 2x + 5$. 2. $y = (x^3 + x + 1)^2$. 3. $y = (x^2 - x + 1)^4$. 4. $y = (3x^2 - 1)^{10}$. 5. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. 6. $y = \sqrt[5]{x^2}$.

7. Найти значения $y(9)$ и $y(11)$, если дано, что $y(10) = 5$ в случае *): а) $y \sim \sqrt{x}$, б) $y \sim \frac{1}{x}$, в) $y \sim x^2$. Задачу решить в уме, без выкладок. Сравните ответ с точным.

---

*) Знак $\sim$ озиачает пропорционально.

§ 6. Производные алгебраических функций с постоянными показателями

Совокупность правил §§ 1—5 позволяет найти производную любой функции, составленной путем сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень (постоянную), в том числе дробную (корни).

Покажем на одном примере, как это удобнее всего делать практически. Найдем производную функции

$$f(x)=x\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Ответ следует писать сразу, т. е. не вводя каких-либо новых обозначений (вроде $\sqrt[3]{x^2-1}=y$). Производную берут как бы отдельно по каждому месту, где стоит x, приговаривая для памяти примерно следующее (буквы «а» «б», «в», ... показывают, к каким местам выражения производной, написанного внизу, относятся слова): производная (а) по x, стоящему перед корнем, плюс (б) производная по $\sqrt[3]{x^2-1}$, умноженная на (в) производную от $\sqrt[3]{x^2-1}$ по x^2-1, умноженная на (г) производную от x^2-1

$$\frac{df}{dx}=\overbrace{\sqrt[3]{x^2-1}}^{(а)}+\overbrace{x}^{(б)}\cdot\overbrace{\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2-1}}^{(в)}\,\overbrace{2x}^{(г)}.$$

Имеет смысл сразу приучаться к такому деловому способу, без лишнего чистописания, пользуясь следующими принципами:

а) правило дифференцирования сложной функции [§ 3, формулы (3.2), (3.4)];

б) если выражение составлено из нескольких функций, то его производная равна сумме производных, вычисленных в предположении, что каждый раз лишь одна из функций предполагается переменной, а остальные постоянны [§ 4, формулы (4.2), (4.4), (4.6)].

Формулу для производной степени удобно применять в виде

$$y=cx^n,\quad \frac{dy}{dx}=n\frac{y}{x},$$

как это сделано выше, в примере — см. выражение (в).

Для того чтобы приобрести навык, нужно проделать 10—20 упражнений только на технику безотносительно к физическим задачам.

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y=x^3(x^2-1)^2$. 2. $y=x^3\sqrt{x^2+x}$. 3. $y=x^5\sqrt[3]{x^2-1}(x^3-2x)^{\frac{1}{5}}$. 4. $y=\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{x^3-2}$. 5. $y=x^2\sqrt{\sqrt[3]{x}+x}$.

6. $y=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^5 x$. 7. $y=\frac{x}{1-x^2}$. 8. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

9. $y=\frac{(x-1)(x+3)}{x+1}$. 10. $y=\frac{3x-1}{x^5}\sqrt{x^3+2}$. 11. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

12. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$. 13. $y=\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}$. 14. $y=x\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}$.

15. $y=\frac{x^2-2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 16. $y=x\sqrt[3]{(2x+3)^2}$.

17. $y=(x^3-1)\sqrt{x-1}+x\sqrt[3]{x^2-1}$. 18. $y=\frac{x\sqrt[3]{(2x-3)^2}}{(x-1)^2}$.

19. $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. 20. $y=\frac{x^2+x+1}{x-2}\sqrt[3]{x+1}$. 21. $y=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{x^3+1}$.

22. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x+1}}$. 23. $y=x\sqrt{x^2-1}\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$.

24. $y=\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{7}}x^2$. 25. $y=\frac{\sqrt[3]{x}-2x}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$.

§ 7. Показательная функция

Рассмотрим функцию

$$y=a^x,$$

где число a больше 1. График функции y изображен на рис. 42. При $x=0$ $y=1$ при любом a.

Функция y при всех x положительна и растет с увеличением x, так что и производная ее также везде положи-

тельна. При увеличении x на постоянную величину c получим:

$$y(x+c)=a^{x+c}=a^c\cdot a^x=b\cdot a^x=b\cdot y(x),\quad \text{где}\quad b=a^c;$$

величина y умножается на постоянную величину. Таким образом, если x менять последовательно, одинаковыми шагами (в арифметической прогрессии)

$$x=x_0,\ x_0+c,\ x_0+2c,\ \ldots\ \ldots,\ x_0+nc,$$

то y будет принимать значения

$$y_0,\quad by_0,\quad b^2y_0,\ \ldots,\ b^ny_0.$$

Такой закон нарастания, как известно, называется геометрической прогрессией.

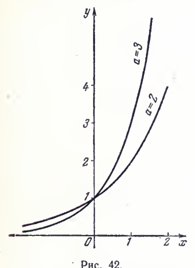


Рис. 42.

Найдем производную показательной функции для $a=10$ *):

$$\frac{d(10^x)}{dx}=\frac{10^{x+dx}-10^x}{dx}=$$
$$=10^x\frac{10^{dx}-1}{dx}.$$

Что представляет собой величина

$$\frac{10^{dx}-1}{dx}?$$

Это есть предел отношения $\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$. Найдем этот предел численно, «арифметически». Пользуясь четырехзначной таблицей логарифмов, находим:

$$10^{0,1}=1,2586,\quad \frac{10^{0,1}-1}{0,1}=2,586,$$
$$10^{0,01}=1,0233,\quad \frac{10^{0,01}-1}{0,01}=2,33,$$
$$10^{0,001}=1,0023,\quad \frac{10^{0,001}-1}{0,001}=2,3.$$

*) $a=10$ взято для облегчения вычислений.

Таким образом, получаем:

$$\frac{10^{dx}-1}{dx}=2,3.$$

Следовательно, производная

$$\frac{d}{dx}(10^x)=10^x\cdot 2,3.$$

Производную 10^x мы нашли, так сказать, опытным путем, при помощи таблиц. Для любой другой показательной функции задачу теперь легко свести к предыдущей: пользуясь понятием логарифма, запишем:

$$a=10^{\lg a},\quad a^x=10^{x\lg a}.$$

По правилу нахождения производной сложной функции получим:

$$\frac{da^x}{dx}=10^{x\lg a}\cdot 2,3\cdot\lg a=a^x\cdot 2,3\cdot\lg a. \tag{7.1}$$

Замечательная особенность показательной функции заключается в том, что ее производная прямо пропорциональна самой функции. В этом главное свойство геометрической прогрессии: чем больше сама величина, тем быстрее она растет. Свойства геометрической прогрессии, необычайно сильное ее возрастание — любимая тема популярных книжек, например «Занимательной алгебры» и «Живой математики» Перельмана.

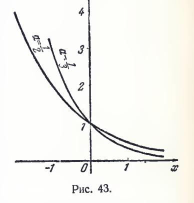


Рис. 43.

Если в показательной функции $0<a<1$, то график функции имеет вид рис. 43, при увеличении x в арифметической прогрессии y уменьшается в геометрической прогрессии. Формула (7.1) по-прежнему применима. В этой формуле $\lg a$ отрицателен при $a<1$ и, следовательно, производная, будучи пропорциональна функции, имеет противоположный знак.

В главе V мы приведем несколько примеров, в которых та или иная величина уменьшается с течением времени, притом так, что скорость уменьшения пропорциональна самой оставшейся на данный момент величине

$$\frac{dy}{dt} = -ky.$$

Как видно из предыдущего, в этом случае решением задачи явится показательная функция

$$y = y_0 a^t \ (a < 1).$$

Подробно об этих задачах будет рассказано в главе V.

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y = 10^{\sqrt{x}}$. 2. $y = 2^x$. 3. $y = 5^{x+1}$. 4. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

§ 8. Число e

Найдем такое основание, для которого формула производной показательной функции имела бы наиболее простой вид, а именно, чтобы в выражении производной коэффициент равнялся единице, так что его можно было бы не писать. Обозначим это число буквой e. Таким образом,

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \tag{8.1}$$

При помощи формулы (7.1) число это легко найти:

$$2{,}3 \cdot \lg e = 1, \quad \lg e = \frac{1}{2{,}3} = 0{,}4343,$$

откуда по таблице логарифмов

$$e = 2{,}718.$$

Такой практический подход не соответствует историческому ходу развития науки и принципиально не удовлетворителен. Мы пользовались числами, заимствованными из таблицы логарифмов, не задумываясь над тем, как они вычислены *).

*) Точность, с которой дано здесь число e, также больше той точности, которую можно получить, определяя производную 10^x при помощи четырехзначной таблицы логарифмов.

Найдем число e, основываясь только на формуле (8.1). По общему свойству показательных функций $e^0=1$. Рассмотрим функцию $y=e^x$. Тогда $y(0)=1$. Из формулы (8.1) $y'(0)=1$.

Возьмем малое $\Delta x=r$ и подсчитаем приращение функции $y=e^x$ при переходе от $x=0$ к $x=r$: $\Delta y=y'\Delta x$. Поэтому $\Delta y=1\cdot\Delta x=r$; $y(x)=y(0)+\Delta y$, откуда

$$e^r=1+r. \tag{8.2}$$

Запишем малое число r как дробь с большим знаменателем: $r=\frac{1}{n}$, если $r\ll 1$, то $n\gg 1$*). Тогда из (8.2)

$$e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}, \text{ откуда } e=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Это выражение тем точнее, чем больше n, так что строгое определение числа e пишется так:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(читается: e есть предел выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при n, стремящемся к бесконечности).

Однако не надо бояться слов «предел», «бесконечность». Практически, например, $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2{,}705$, что довольно мало отличается от точного значения. Советуем читателю самому найти $\left(1+\frac{1}{8}\right)^8$.

Мы получили, что при малом r

$$e^r=1+r,$$

и это тем точнее, чем меньше r**). Проверим это на числах.

Из табл. 1***) видим, что даже при $r=\pm 0{,}3$ ошибка не превышает 6%. Для расчетов полезно запомнить не только $e=2{,}718$, но и приближенные значения $e^2=7{,}4$, $e^3=20$, $e^4=55$, $e^5=150$. Краткая таблица e^x и e^{-x} дана в приложении к главе II, стр. 170.

*) Запись $r\ll 1$ означает, что число r значительно меньше 1.

**) Для функции $y=e^x$ составлены подробные таблицы.

***) Значения e^x взяты из четырехзначных таблиц.

Таблица 1

r	$1+r$	e^r	r	$1+r$	e^r
$-0,5$	0,5	0,6065	0	1	1
$-0,4$	0,6	0,6703	$+0,01$	1,01	1,0101
$-0,3$	0,7	0,7408	0,1	1,1	1,1052
$-0,2$	0,8	0,8187	0,2	1,2	1,2214
$-0,1$	0,9	0,9048	0,3	1,3	1,3499
$-0,01$	0,99	0,9900	0,4	1,4	1,4918
			0,5	1,5	1,6487

При помощи числа e упрощается решение задач на геометрические прогрессии и сложные проценты. Рассмотрим пример: во сколько раз вырастает производство за 50 лет при ежегодном росте на $2^0/_0$? Нужно вычислить $1,02^{50}$. Применение числа e заключается в том, что приближенно мы заменяем $1,02=e^{0,02}$, откуда $1,02^{50}=e^{0,02\cdot 50}=e=2,72$. Общая формула

$$(1+r)^m = e^{mr} \quad (r \ll 1). \tag{8.3}$$

Для применимости этой формулы достаточно, чтобы было мало r; m и mr могут и не быть малыми. Если mr тоже мало, то $e^{mr}=1+mr$, получаем известную ранее формулу $(1+r)^m=1+mr$, однако при больших mr ею пользоваться нельзя, тогда как выражение (8.3) остается справедливым.

Так, для примера, приведенного выше, точное значение $1,02^{50}=2,693$, приближенно $1,02^{50}=e^1=2,718$, по формуле $(1+r)^m=1+mr$ получим $1+50\times 0,2=2$. Расчет с помощью числа e дал ошибку около $1^0/_0$, тогда как расчет по формуле $(1+r)^m=1+mr$ в этом случае дал ошибку около $25^0/_0$. В общем виде оценка точности формулы дана в § 17, упражнение 5.

В соответствии с первоначальным определением числа e формулой (8.1) производные от показательных функций имеют особенно простой вид, когда возводится в степень число e. Эти производные удобно выражаются через самую

функцию. Приведем ряд формул

$$y=e^x; \qquad \frac{dy}{dx}=e^x=y.$$

$$y=Ce^x; \qquad \frac{dy}{dx}=C\frac{de^x}{dx}=Ce^x=y.$$

$$y=Ce^{kx}; \qquad \frac{dy}{dx}=C\frac{de^{kx}}{dx}=Ce^{kx}\frac{d(kx)}{dx}=ky.$$

$$y=e^{m(x)}; \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{de^{m(x)}}{dx}=e^{m(x)}\frac{dm(x)}{dx}=y\frac{dm(x)}{dx}.$$

$$y=f(x)\,e^{m(x)}; \frac{dy}{dx}=f'(x)\,e^{m(x)}+f(x)\,e^{m(x)}\,m'(x)=$$
$$=y\left(\frac{f'(x)}{f(x)}+m'(x)\right).$$

Показательную функцию от x с основанием e записывают в виде e^x. Однако если x само равно какому-нибудь сложному и громоздкому выражению, то такая запись уже неудобна. Например, при $x=\left(\frac{7t^2+24t}{t^3+5}\right)^3$ в выражении

$$e^{\left(\frac{7t^2+24t}{t^3+5}\right)^3}$$

можно просто не заметить букву e или не понять, к чему она относится. Поэтому существует еще одно обозначение для функции e^x:

$$e^x \equiv \exp(x)$$

(читается «экспонента от икс», от слова «exponent» — показатель), а зависимость по закону e^x и саму функцию e^x часто называют экспоненциальной зависимостью и экспоненциальной функцией.

В новых обозначениях наш пример примет такой вид:

$$e^x=\exp\left[\left(\frac{7t^2+24t}{t^3+5}\right)^3\right].$$

Вывод. Итак, можно дать три различных определения числа e: 1) из условия $(e^x)'=e^x$, 2) из условия $e^r=1+r$ при $r\ll 1$ и 3) как предел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$. Для закрепления этого очень важного раздела читатель должен, отложив книгу, сам показать, как из каждого определения следуют два другие, рассматриваемые как свойства e.

У числа e есть и другие замечательные определения и свойства. В частности, ряд, с помощью которого удобно вычисляется e, дан ниже на стр. 145 (формула (18.2)). Далее, есть формула $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; при малых φ справедливость этой формулы подтверждается тем, что из 2-го определения e следует $e^{i\varphi} \approx 1 + i\varphi$, и $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$ при $\varphi \ll 1$. Так как функции $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$ описывают гармонические колебания, то функция $e^{i\omega t}$ очень часто используется в теории колебаний.

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y = e^{-x}$. 2. $y = e^{x^2}$. 3. $y = e^{x^3-3x+1}$. 4. $y = e^{\sqrt{x}}$. 5. $y = 5e^x - e^{3x}$.

§ 9. Логарифмы

По определению логарифмом величины f по основанию a называется показатель степени g, в которую надо возвести число a (основанне логарнфмов), чтобы получить данное число f

$$f = a^g, \quad g = \log_a f.$$

Кривая, изображающая зависимость $y = \log_a x$ (для случая $a > 1$), показана на рис. 44. Отметим, что $y = 0$ при $x = 1$; $y > 0$ при $x > 1$, а при $x < 1$ $y < 0$. Вся кривая расположена правее оси ординат. Так как положительное число a при возведении в любую степень дает число положительное, то не существует логарифмов отрицательных чисел. Обратим еще внимание читателя на то, что в равенствах $y = \log_a x$, $x = a^y$ величины x, y и a безразмерны.

Рис. 44.

Как видно на рис. 44, производная функции $y = \log_a x$ положительна при всех значениях x; с увеличением x про-

изводная уменьшается. Логарифмы по основанию e (см. § 8) называются натуральными. Их обозначают $\ln x$.

Найдем производную натурального логарифма. Рассмотрим $d\ln x = \ln(x+dx) - \ln x$. Воспользуемся известной формулой $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$. Тогда

$$d\ln x = \ln\frac{x+dx}{x} = \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right). \quad (9.1)$$

Мы уже знаем (см. § 8), что при малых r

$$e^r = 1 + r.$$

Возьмем логарифмы обеих частей

$$\ln e^r = r = \ln(1+r). \quad (9.2)$$

Пользуясь (9.2), получаем из (9.1)

$$d\ln x = \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x}.$$

Поэтому

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}. \quad (9.3)$$

Производную натурального логарифма можно найти также, пользуясь тем, что логарифм и показательная функция — обратные функции. Запишем:

$$y = \ln x,\ \ x = e^y;\ \ x' = \frac{dx}{dy} = \frac{d(e^y)}{dy} = e^y,\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Когда x меняется в геометрической прогрессии, $\ln x$ меняется в арифметической прогрессии:

$$x = ab^m, \quad \ln x = \ln a + m\ln b.$$

Поэтому чем больше x, тем медленнее растет $\ln x$, тем меньше производная.

Выведем формулу, связывающую логарифмы одного и того же числа по разным основаниям. Пусть

$$f = \log_a h, \quad a^f = h. \quad (9.4)$$

Прологарифмируем обе части второго равенства (9.4) по основанию b: $f\log_b a = \log_b h$, откуда $f = \frac{\log_b h}{\log_b a}$. Принимая

во внимание (9.4), получаем:

$$\log_a h = \frac{\log_b h}{\log_b a}. \qquad (9.5)$$

Пользуясь (9.5), можно получить производную логарифма по любому основанию. Пусть $y = \log_a x$. Тогда

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a}\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}. \qquad (9.6)$$

В формуле (9.5) положим $b = e$ и $h = e$, получим: $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, и формулу (9.6) перепишем в виде

$$\frac{d\log_a x}{dx} = \frac{\log_a e}{x}. \qquad (9.7)$$

Из формул (9.3), (9.6), (9.7) самая простая (9.3). Она получается, если логарифмы взяты по основанию e. Поэтому они и называются натуральными, т. е. природными, естественными. Полезно запомнить для грубых расчетов в уме: $\ln 2 = 0{,}69$, $\ln 3 = 1{,}1$, $\ln 10 = 2{,}3 = \frac{1}{0{,}434}$. Краткая таблица натуральных логарифмов дана в приложении к главе II, стр. 170, таблица V.

Если под знаком логарифма стоит какая-нибудь функция $f(x)$, то производную находим по правилу дифференцирования сложных функций (§ 3):

$$\frac{d\ln f(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}. \qquad (9.8)$$

Заметим, что, пользуясь понятием логарифма, легко найти производную функции $y = a^x$ при любом a. Действительно, $\ln y = x\ln a$, поэтому $y = e^{x\ln a}$, откуда

$$y' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a = y\ln a.$$

Формула (9.8) дает возможность находить производные выражений вида $f(x)^{h(x)}$, т. е. содержащих переменную и в основании и в показателе степени. Пусть

$$y = f(x)^{h(x)}. \qquad (9.9)$$

Прологарифмируем (9.9) (логарифмы можно брать по любому основаиию; возьмем иатуральные)

$$\ln y = h(x)\ln f(x). \qquad (9.10)$$

Возьмем производную от обеих частей (9.10), при этом учтем, что $\ln y$ есть сложная функция x [так же как $\ln f(x)$]:

$$\frac{1}{y} y' = h'(x) \ln f(x) + h(x) \frac{f'(x)}{f(x)},$$

откуда

$$y' = y \left[h'(x) \ln f(x) + h(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right],$$

или, пользуясь (9.9),

$$y' = f(x)^{h(x)} h'(x) \ln f(x) + h(x) f(x)^{h(x)-1} f'(x). \quad (9.11)$$

Рассмотрим формулу (9.11). Справа в ней стоит сумма двух членов: первый член $f(x)^{h(x)} h'(x) \ln f(x)$ есть производная выражения f^h, вычисленная в предположении, что переменной является лишь h, а f — постоянная; второй член $h(x) f(x)^{h(x)-1} f'(x)$ — это производная выражения f^h, вычисленная в предположении, что f — переменная, а h — постоянная. Подтверждается общий принцип, высказанный в конце § 4.

Упражнения

1. Вспомнив $\ln 10$, найти $\ln 100$.
2. Пользуясь формулой (9.5), найти $\log_5 15$.
3. Пользуясь тем, что $\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$, и дифференцируя обе части, получить формулу для производной произведения.
4. Исходя из соотношения $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$, получить формулу для производной частного.

Найти производные функций:
5. $y = \ln 2x$. 6. $y = \ln(x+3)$. 7. $y = \ln 3x$. 8. $y = \ln(x^2+1)$. 9. $y = \ln(3x^2 - x + 1)$. 10. $y = \ln \frac{x-1}{x+1}$. 11. $y = \ln \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. 12. $y = x \ln x$. 13. $y = x^3 \ln(x+1)$. 14. $y = x^x$. 15. $y = x^{\sqrt{x^2-1}}$.

§ 10. Тригонометрические функции

В этом параграфе мы найдем производные тригонометрических функций.

Тригонометрические функции определяются как отношения отрезков и, следовательно, безразмерны. Они зависят от безразмерной величины — угла.

В пределах углов от нуля до прямого угла тригонометрические функции можно определять как отношения отрезков

в прямоугольном треугольнике (синус угла равен отношению противолежащего углу катета к гипотенузе и т. д.). Нам, однако, важно определить функции любых углов — и бóльших прямого, и отрицательных, — поэтому тригонометрические функции будем рассматривать в круге.

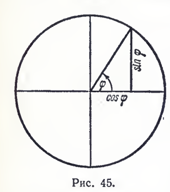


Рис. 45.

Единственной мерой угла, употребляемой в высшей математике, является радиан. Краткие таблицы тригонометрических функций в зависимости от угла, выраженного в радианной мере, приведены в приложении к главе II, стр. 171, таблица VI.

Чтобы не говорить все время об отношении линии синуса к радиусу круга или об угле как отношении длины дуги к радиусу, будем рассматривать круг с радиусом, равным 1. При этом кратко будем говорить, что синус равен длине линии синуса в таком круге, угол равен длине дуги и т. д.

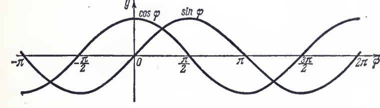


Рис. 46.

Однако читатель должен помнить, что и тригонометрические функции и углы безразмерны и не измеряются единицами длины (сантиметрами, дюймами или метрами). Синус равен длине линии синуса (в сантиметрах), деленной на длину радиуса (в сантиметрах), и при $r = 1$ *см* численно равен длине линии синуса. Линии синуса и косинуса показаны на рис. 45.

Напомним вид графиков синуса и косинуса в зависимости от угла (рис. 46). Период синуса, так же как период коси-

нуса, равен $2\pi = 6{,}28$ и соответствует полному обороту радиуса окружности.

Найдем производные синуса и косинуса геометрически. На рис. 47 конец радиуса, проведенного под углом φ, обозначен A; конец радиуса, проведенного под углом $\varphi + d\varphi$,

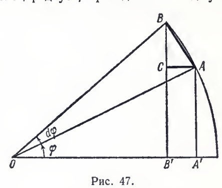


Рис. 47.

обозначен B. Таким образом, длина дуги AB равна $d\varphi$. Проводим из A перпендикуляр AC на линию синуса угла $\varphi + d\varphi$ BB'. Как видно из рис. 47,

$$AA' = \sin\varphi, \; BB' = \sin(\varphi + d\varphi)$$

и

$$BC = \sin(\varphi + d\varphi) - \sin\varphi = d(\sin\varphi).$$

Далее,

$$OA' = \cos\varphi, \; OB' = \cos(\varphi + d\varphi)$$

и

$$A'B' = AC = \cos\varphi - \cos(\varphi + d\varphi) = -d(\cos\varphi).$$

Так как угол $d\varphi$ мал, то длина дуги AB не отличается от длины хорды AB и угол ABC, образованный хордой AB и вертикалью BCB', равен φ *).

Из рассмотрения $\triangle ABC$ найдем $BC = AB\cos\varphi$, $AC = AB\sin\varphi$. Таким образом,

$$d(\sin\varphi) = \cos\varphi\, d\varphi, \quad d(\cos\varphi) = -\sin\varphi\, d\varphi$$

*) Точное значение угла равно $\varphi + \frac{d\varphi}{2}$, но треугольник ABC мал ($AB = d\varphi$), поэтому, пренебрегая $d\varphi$ в выражении угла ABC, мы в величинах BC и AC совершаем ошибки, пропорциональные $(d\varphi)^2$.

и, следовательно,

$$\frac{d(\sin\varphi)}{d\varphi}=\cos\varphi;\quad \frac{d(\cos\varphi)}{d\varphi}=-\sin\varphi. \tag{10.1}$$

Дадим другой способ вычисления производной $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ без использования чертежа. Согласно общим формулам $\Delta\sin\varphi=\sin(\varphi+\Delta\varphi)-\sin\varphi$. Вспомним формулу синуса суммы двух углов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

и применим ее к $\sin(\varphi+\Delta\varphi)$. Получим

$$\sin(\varphi+\Delta\varphi)=\sin\varphi\cdot\cos\Delta\varphi+\cos\varphi\cdot\sin\Delta\varphi,$$

откуда

$$\Delta\sin\varphi=\sin\varphi\cdot\cos\Delta\varphi+\cos\varphi\cdot\sin\Delta\varphi-\sin\varphi.$$

Составим отношение приращений, его можно записать так:

$$\frac{\Delta\sin\varphi}{\Delta\varphi}=\cos\varphi\cdot\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}-\sin\varphi\cdot\frac{1-\cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Теперь нужно перейти к пределу $\Delta\varphi\to 0$. Известно, что при углах α или $\Delta\varphi$, стремящихся к 0, синус равен дуге: $\sin\alpha=\alpha$, $\sin\Delta\varphi=\Delta\varphi$. Другими словами,

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}=1.$$

Второй член надо сперва преобразовать: по известной формуле

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\quad 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,$$

$$1-\cos\Delta\varphi=2\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

В этой формуле при малом $\Delta\varphi$ заменим $\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=\frac{\Delta\varphi}{2}$. Получим тогда

$$\frac{1-\cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi}=\frac{2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2}{\Delta\varphi}=\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Следовательно, в пределе при $\Delta\varphi\to 0$ второй член пропадает: $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\frac{1-\cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi}=0$. Отсюда

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\sin\varphi}{\Delta\varphi}=\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}=\cos\varphi.$$

Соотношения (10.1) справедливы для любых углов, а не только в I четверти. Полезно также, глядя на график функций $\sin x$ и $\cos x$, проверить, что формула (10.1) правильно дает знаки производных при любом x, а не только в I четверти.

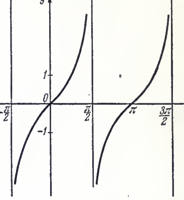


Рис. 48.

Проверим еще формулы (10.1) при малых углах. При малом φ геометрически очевидно, что

$$\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1.$$

Первая формула $\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi$ при малом φ дает $\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = 1$. Вторая формула даст $\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\varphi$, $\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = 0$ при $\varphi = 0$; равенство нулю производной соответствует тому, что косинус имеет максимум при $\varphi = 0$.

Зная производные функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, легко найти производные всех остальных тригонометрических функций, используя соотношения, связывающие тригонометрические функции.

Так, например, известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Поэтому

$$\frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos^2 x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

по формуле дифференцирования дроби. Отсюда

$$\frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{10.2}$$

Из рис. 48, на котором изображен график $\operatorname{tg} x$, видно, что функция $y = \operatorname{tg} x$ при любых x имеет положительную производную. Вблизи точек разрыва $\left(x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2},\ \ldots\right)$ производная неограниченно возрастает. Оба эти вывода вполне согласуются с формулой (10.2).

Совершенно аналогичным приемом находим:

$$\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Производные тангенса и котангенса можно найти и непосредственно. Заметим, что

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Отсюда

$$\Delta\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi) - \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\Delta\varphi}{\cos(\varphi+\Delta\varphi)\cos\varphi}. \qquad (10.3)$$

Имея в виду (см. стр. 112), что

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1,$$

из (10.3) получим:

$$\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{1}{\cos(\varphi+\Delta\varphi)\cdot\cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y=\sin(2x+3)$. 2. $y=\cos(x-1)$. 3. $y=\cos(x^2-x+1)$. 4. $y=\sin^2 x$. 5. $y=\sin 3x\cos^2 x$. 6. $y=(\sin 2x)^x$. 7. $y=x\operatorname{tg} x$. 8. $y=e^{\operatorname{tg} 2x}$. 9. $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

§ 11. Обратные тригонометрические функции

Новые очень интересные результаты получаются при рассмотрении обратных тригонометрических функций. Напомним читателю определения этих функций. Функция

$$y = \operatorname{Arc}\sin x \qquad (11.1)$$

представляет собой угол такой, что

$$\sin y = x. \qquad (11.2)$$

Равенство (11.1) означает то же самое, что и (11.2). Аналогично функция

$$y = \operatorname{Arctg} x$$

означает угол y такой, что

$$\operatorname{tg} y = x.$$

Аналогично определяются функции $y = \operatorname{Arccos} x$ $(x = \cos y)$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$ $(x = \operatorname{ctg} y)$. Заметим, что функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ имеет смысл только при значениях x, удовлетворяющих неравенству $-1 \leqslant x \leqslant 1$, что видно из (11.2). Функция $y = \operatorname{Arctg} x$ имеет смысл при всех значениях x.

Рассмотрим подробнее функцию $y = \operatorname{Arcsin} x$. Пусть, например, $x = \frac{1}{2}$, $y = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$. Можем взять $y = \frac{\pi}{6}$, так как $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, однако можем взять и $y = \frac{5\pi}{6}$, так как $\sin \frac{5\pi}{6}$ тоже равен $\frac{1}{2}$. Можно взять $y = \frac{13\pi}{6}$, $y = \frac{17\pi}{6}$ и т. д. Мы видим, что одному значению x отвечает бесчисленное множество значений y. Все эти свойства функции $y = \operatorname{Arcsin} x$ видны на графике (рис. 49).

Рис. 49.

Будем рассматривать отрезок кривой, для которого $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Эта часть кривой называется главным значением функции $y = \operatorname{Arcsin} x$ и обозначается $y = \arcsin x$ (пишется с малым а). Если ограничиться рассмотрением $y = \arcsin x$, то каждому x отвечает только одно значение y. Главное значение арктангенса определяется аналогично:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Найдем производную функции $y = \arcsin x$. Воспользуемся

тем, что арксинус есть функция, обратная синусу:

$$y = \arcsin x, \quad x = \sin y,$$

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \cos y;$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y}. \tag{11.3}$$

Однако аргументом мы считаем x, поэтому $\frac{dy}{dx}$ следует выразить через x, а не через y, как в (11.3). Воспользуемся известной формулой $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, откуда $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$. Так как мы рассматриваем главное значение арксинуса, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\cos y \geqslant 0$, поэтому перед корнем берем знак плюс: $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$. Так как $\sin y = x$ согласно (11.2), то $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Подставляя это в (11.3), находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

или

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{11.4}$$

Формулой (11.4) можно пользоваться не только для главного значения, но и для других участков кривой, выбирая соответственно знак у корня. Действительно, при одном и том же значении x на различных участках кривой производная имеет разные знаки; так, в точках A и C (рис. 49) производная положительна, а в точках B и D отрицательна.

Найдем теперь производную $\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx}$. Если $y = \operatorname{arctg} x$, то $x = \operatorname{tg} y$. Отсюда, аналогично предыдущему, находим:

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y},$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 y. \tag{11.5}$$

Из тригонометрии известно, что

$$\operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y},$$

поэтому

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2.$$

Пользуясь соотношением (11.5), получаем окончательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \quad (11.6)$$

Для любой другой ветви арктангенса (рис. 50) остается справедливой формула (11.6), так как любая другая ветвь получается из основной параллельным переносом, а это не изменяет величины производной.

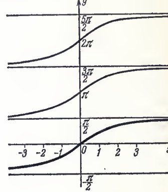


Рис. 50.

Упражнения

1. Найти производные функций $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{arctg} x$.

2. Зная, что $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$, найти $\frac{d(\ln x)}{dx}$, пользуясь тем, что из равенства $y = \ln x$ следует $x = e^y$.

Найти производные функций:

3. $y = \arcsin 2x$. 4. $y = \operatorname{arctg}(3x+1)$. 5. $y = \operatorname{arctg}(x^2 - x)$. 6. $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

§ 12. Производная функции, заданной неявно

Неявное задание функции $y(x)$ — это задание ее выражением вида

$$F(x, y) = 0. \quad (12.1)$$

Если соответствующее уравнение можно решить относительно x или y, то мы вернемся к обычному заданию функции. Однако иногда такое решение приводит к сложным формулам, а иногда его и вовсе нельзя найти. Так, например, уравнение окружности в форме

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (12.2)$$

проще, чем следующее из него выражение

$$y = \pm \sqrt{1-x^2}. \tag{12.3}$$

Если в (12.1) левая часть — произвольный многочлен, содержащий x и y в степени выше четвертой, то в общем случае это уравнение нельзя разрешить соответственно относительно x или y. Также не разрешается, например, простое с виду уравнение

$$F(x, y) = x \sin x + y \sin y - \pi = 0. \tag{12.4}$$

Однако и в тех случаях, когда нет решения в виде формулы, прямо дающей способ вычисления y для данного x, все равно y есть определенная функция x; при каждом x можно, решая уравнение численно, найти соответствующее y, можно построить кривую в плоскости x, y. Возможно, что кривая будет существовать не при всех x (в случае окружности, например, лишь при x между $-r$ и $+r$, где r — радиус окружности), при данном x может быть больше одного значения y (в случае окружности, например, два значения, в соответствии со знаком $\pm$ у корня квадратного). Однако эти осложнения не отменяют основного факта: уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как функцию x.

Как найти производную $\frac{dy}{dx}$? Можно ли это сделать, не решив уравнение, т. е. не выразив $y(x)$ явно?

Это было сделано еще Ньютоном. Пусть x, y удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y) = 0. \tag{12.1}$$

Возьмем соседние значения $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, также удовлетворяющие уравнению:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0. \tag{12.5}$$

Запишем, пользуясь (12.1):

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x + \Delta x, y) - F(x, y). \tag{12.6}$$

Разность $F(x + \Delta x, y) - F(x, y)$ представляет собой приращение функции $F(x, y)$, рассматриваемой как функция

одной переменной x при неизменном y. Это приращение, как мы знаем, в пределе*) может быть выражено так:

$$F(x+\Delta x,\ y)-F(x,\ y)=\left.\frac{dF(x,\ y)}{dx}\right|_{y=\mathrm{const}}\cdot\Delta x.$$

Мы отмечаем здесь, что при вычислении производной по x функции двух переменных x и y мы считаем y постоянным. Вычисленную таким образом производную называют частной производной и в ее обозначении вместо прямой буквы d пишут круглую ∂:

$$F(x+\Delta x,\ y)-F(x,\ y)=\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}\Delta x;$$

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,\ y)-F(x,\ y)}{\Delta x}.$$

Аналогично для первой разности в (12.6) можно написать:

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x+\Delta x,\ y)=\frac{\partial F(x+\Delta x,\ y)}{\partial y}\Delta y.$$

Условие (12.5) дает:

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial F(x+\Delta x,\ y)}{\partial y}\cdot\Delta y=0$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x+\Delta x,\ y)}{\partial y}}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим слева производную, а справа при этом можно будет отбросить Δx. Окончательно

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}}. \qquad (12.7)$$

Обратите внимание на знак минус в (12.7) и на то, что в данном случае нельзя просто «сократить» $\partial F(x,\ y)$ в числителе и знаменателе.

*) Выражение «равно в пределе» при малом Δx или Δy разъяснено подробно в § 4 главы I, где рассматривается выражение приращения функции с помощью производной.

Покажем применение (12.7) на примере уравнения (12.2). Имеем $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$;

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}. \qquad (12.8)$$

Легко убедиться, что этот результат совпадает с тем, что получится, если вычислить производную (12.3).

Найдем производную в случае (12.4)

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \sin x + x\cos x; \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \sin y + y\cos y;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\sin x + x\cos x}{\sin y + y\cos y}.$$

Таким образом, в выражение производной неявной функции входят обе величины, x и y. Чтобы найти ее численно, нужно при заданном x найти численно y. Но если бы мы не имели формулы (12.7), то для нахождения производной нам пришлось бы находить численно два значения y_2 и y_1 при двух соседних x_2 и x_1 и находить отношение $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. При этом чем ближе x_2 и x_1, тем точнее пришлось бы вычислять y_2 и y_1, а это часто затруднительно.

Заметим, наконец, что если $F(x, y) = 0$ приводит к неоднозначной кривой, т. е. при одном значении x есть два или больше значений y (несколько ветвей кривой), то выражение (12.7) при данном x при подстановке разных y дает значения производной в соответствующих точках. Читателю предлагается проверить это на примере уравнения окружности (12.2), для которого производная дана формулой (12.8).

Для нахождения производной функции, заданной неявно, нам пришлось ввести новое понятие — понятие частной производной. Это понятие имеет большое значение и необходимо для функций нескольких переменных, которые мы в этой книге не изучаем. По существу, мы уже неявно пользовались понятием частной производной даже в таких элементарных вопросах, как производная произведения нескольких функций $y = h(x)g(x)$ или, например, производная степени $y = h(x)^{g(x)}$ (см. стр. 92, 109), когда мы говорили,

что y' складывается из члена, получающегося при взятии производной по x, стоящему в $h(x)$, и по x, стоящему в выражении $g(x)$. С помощью частных производных мы запишем это правило так: если

$$y = F[g(x),\ h(x)],$$

то

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dx} + \frac{\partial F}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dx}.$$

Упражнения

1. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной уравнением (12.4) в точке $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$. То же в точке $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$.

2. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной уравнением $x^3 + 3x + y^3 + 3y - 8 = 0$, в точке $x = y = 1$.

§ 13. Интеграл. Постановка задачи

В главе I мы познакомились с понятием интеграла. При этом была выяснена тесная связь между двумя различными на первый взгляд задачами. Эти задачи суть:

1) нахождение суммы большого числа малых слагаемых, когда эти слагаемые можно представить как $v(t)\,dt$;

2) нахождение функции $z(t)$, производная которой равна данной функции $v(t)$

$$\frac{dz}{dt} = v(t).$$

Советуем читателю перед чтением дальнейшего материала повторить §§ 7—12 главы I.

Задачи физики, математики, химии по большей части возникают как задачи вычисления суммы. Эта постановка задачи более наглядна; сам вопрос уже подсказывает простой, хотя и приближенный путь для вычисления интересующей величины. Однако этот путь не дает общих формул.

Вторая постановка задачи является более искусственной. Однако у этой постановки задачи есть свои преимущества. Нахождение производных оказалось простым делом, сводя-

щимся к четырем-пяти формулам (производная x^n, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$) и двум-трем правилам. Поэтому легко можно найти производные большого числа функций. Каждый раз, когда найдена производная какой-либо функции $\frac{dz}{dt}=v$, можно зарегистрировать, что для этого v известен интеграл z (см. § 14). Таким образом, можно набрать много отдельных частных случаев, в которых удается решить задачу о нахождении интеграла. При помощи тождественных алгебраических преобразований удалось для нескольких простых типов функций v найти правила нахождения интеграла (см. § 15).

Этого не удается, однако, сделать для всех элементарных функций, так что интегрирование труднее, чем нахождение производных. Тем не менее формулы, полученные для некоторых интегралов во второй постановке задачи, очень важны. Если уж удалось для данной v найти интеграл (неопределенный интеграл или первообразную функцию), то тогда все задачи в первой постановке, все суммы, т. е. все определенные интегралы $\int\limits_a^b v(t)\,dt$, оказываются выраженными простыми формулами посредством функции z: $\int\limits_a^b v(t)\,dt=z(b)-z(a)$. Такой результат является гораздо более полным, более точным и ценным по сравнению с результатом каждого отдельного численного расчета суммы, т. е. определенного интеграла $\int\limits_a^b v(t)\,dt$ в определенных пределах от a до b. Поэтому нашей целью в первую очередь будет именно решение задачи во второй постановке.

§ 14. Простейшие интегралы

Выпишем формулы для производных, найденные в предыдущих параграфах, и соответствующие им интегралы:

$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$, $\qquad n\int x^{n-1}\,dx=x^n+C;$

$\frac{d}{dx}(e^{kx})=ke^{kx}$, $\qquad k\int e^{kx}\,dx=e^{kx}+C;$

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx=\ln x+C;$$
$$\frac{d}{dx}(\sin kx)=k\cos kx, \qquad k\int \cos kx\,dx=\sin kx+C;$$
$$\frac{d}{dx}(\cos kx)=-k\sin kx, \qquad -k\int \sin kx\,dx=\cos kx+C;$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x)=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\operatorname{tg} x+C;$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} x)=-\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad -\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx=\operatorname{ctg} x+C;$$
$$\frac{d}{dx}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C;$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg} x+C.$$

Проделаем небольшие преобразования. В первом интеграле обозначим $n-1=m$ (тогда $n=m+1$) и перепишем его так:

$$\int x^m\,dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}+C.$$

Очевидно, что формула справедлива при всех m, кроме $m=-1$; при $m=-1$ знаменатель обращается в нуль, $x^{m+1}=x^0=1$, получается непригодное для расчетов выражение $\frac{1}{0}+C$. Однако как раз в случае $m=-1$, т. е. для $\int \frac{1}{x}\,dx$, имеет место формула

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x.$$

Эта формула справедлива лишь для положительных значений x, так как $\ln x$ имеет смысл лишь для $x>0$. При $x<0$ $\ln x$ не имеет смысла, но имеет смысл $\ln(-x)$. Так как

$$\frac{d\ln(-x)}{dx}=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x},$$

то $\int \frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$, если $x<0$. Обе формулы для $\int \frac{dx}{x}$ могут быть объединены в одну

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C. \qquad (14.1)$$

Этой формулой можно пользоваться для любого промежутка интегрирования, не содержащего $x=0$.

Интеграл от показательной функции запишется так:

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C.$$

Аналогично получаем для синуса и косинуса

$$\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C,$$

$$\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C.$$

§ 15. Общие свойства интегралов

Выше, в §§ 1—3, были установлены свойства производной суммы функций, производной сложной функции и производной произведения функций. Каждому из этих свойств соответствует определенное свойство, относящееся к интегралам.

Для интегралов имеет место равенство

$$\int [Cf(x) + Eg(x)]\,dx = C\int f(x)\,dx + E\int g(x)\,dx. \quad (15.1)$$

Для доказательства надо взять производную выражения, стоящего справа; если равенство верно, то получим подынтегральную функцию. Дифференцируя, имеем:

$$[C\int f(x)\,dx + E\int g(x)\,dx]' =$$
$$= C[\int f(x)\,dx]' + E[\int g(x)\,dx]' = Cf(x) + Eg(x).$$

Таким образом, равенство (15.1) доказано. Оно показывает, что интеграл суммы нескольких слагаемых разбивается на сумму интегралов отдельных слагаемых, а постоянные множители можно выносить за знак интеграла.

Под знаком интеграла можно делать замену переменной, переходить к новой, более удобной переменной. Рассмотрим несколько простых примеров.

1. Найти $\int (ax+b)^n\,dx\ (n \neq -1)$.

Здесь в качестве новой переменной введем величину, стоящую в скобке. Назовем ее z,

$$ax+b=z. \tag{15.2}$$

При этом надо также от дифференциала dx перейти к дифференциалу dz.

Из выражения (15.2) получаем:

$$dz = a\,dx, \quad dx = \frac{dz}{a}.$$

Таким образом,

$$\int (ax+b)^n\,dx = \int z^n \frac{dz}{a} = \frac{1}{a}\int z^n\,dz = \\ = \frac{z^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C.$$

В правильности результата легко убедиться, вычисляя производную правой части,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}\right] = \\ = \frac{n+1}{a(n+1)}(ax+b)^n \frac{d}{dx}(ax+b) = \frac{(ax+b)^n}{a}a = (ax+b)^n.$$

2. Аналогично выполняется замена переменной в интеграле

$$\int \frac{dx}{ax+b}, \quad z = ax+b, \quad dz = a\,dx, \quad dx = \frac{dz}{a},$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{dz}{a\cdot z} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{a}\ln z + C = \frac{\ln(ax+b)}{a} + C.$$

На практике в таких, очень несложных, примерах преобразования делают менее торжественно, не вводя отдельных обозначений для новых, промежуточных переменных. Пишут, например:

$$\int (ax+b)^n\,dx = \int (ax+b)^n \frac{1}{a}\,d(ax+b) = \\ = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + C.$$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две различные функции переменной x. Правило нахождения производной произведения дает:

$$\frac{d}{dx}(fg) = g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx}. \tag{15.3}$$

Равенство (15.3) дает возможность написать:

$$fg=\int f\frac{dg}{dx}dx+\int g\frac{df}{dx}dx. \tag{15.4}$$

В справедливости (15.4) убеждаемся, составляя производную от его левой и правой частей. При этом получим верное равенство (15.3).

Перепишем (15.4) в виде

$$\int f\frac{dg}{dx}dx=fg-\int g\frac{df}{dx}dx.$$

Сокращенно это равенство пишут так:

$$\int f\,dg=fg-\int g\,df. \tag{15.5}$$

В чем смысл формулы (15.5)? При вычислении интеграла нет правила, выражающего интеграл произведения двух функций через интегралы каждого из сомножителей. Однако если в произведении двух функций fw интеграл одного из сомножителей известен

$$\int w\,dx=g,\quad w=\frac{dg}{dx},$$

то удается выразить интеграл $\int fw\,dx$ через интеграл, в который входит производная $\frac{df}{dx}$. При помощи w перепишем (15.5) в виде

$$\int fw\,dx=f\left(\int w\,dx\right)-\int\left(\int w\,dx\right)\frac{df}{dx}dx. \tag{15.6}$$

Так как $\int w\,dx=g$, то последний интеграл в (15.6) есть $\int g\frac{df}{dx}dx$; он иногда бывает проще исходного интеграла $\int fw\,dx$ или сводится к известному интегралу. В частности, если f — степенная функция, то $\frac{df}{dx}$ имеет степень на единицу ниже, чем f. Формула (15.5) или (15.6) называется формулой *интегрирования по частям*.

Приведем примеры.

1. Найти $\int xe^x\,dx$.

Положим $f=x$; тогда $w=\frac{dg}{dx}=e^x$, $e^x\,dx=dg$, $g=\int e^x\,dx=e^x$, $df=dx$. По формуле (15.5)

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x=e^x(x-1)+C.$$

2. Найти $\int x^2e^x\,dx$.

Положим $f=x^2$; тогда $w=\frac{dg}{dx}=e^x$, $e^x\,dx=dg$, $g=\int e^x\,dx=e^x$, $df=2x\,dx$. Пользуясь (15.5), получаем $\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx$; пользуясь результатом первого примера, получаем:

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=(x^2-2x+2)\,e^x+C.$$

Для нахождения $\int P_n(x)\,e^{kx}\,dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, придется n раз выполнить интегрирование по частям. При этом в ответе получится $Q_n(x)\,e^{kx}$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n. Зная это, можно не выполнять n раз интегрирование по частям, а прямо находить коэффициенты многочлена $Q_n(x)$.

Рассмотрим тот же пример. Найти $\int x^2e^x\,dx$. Напишем равенство с неизвестными пока коэффициентами многочлена $Q_n(x)$

$$\int x^2e^x\,dx=(a_2x^2+a_1x+a_0)\,e^x+C. \qquad (15.7)$$

Составим производную от обеих частей равенства (15.7)

$$x^2e^x=(2a_2x+a_1)\,e^x+(a_2x^2+a_1x+a_0)\,e^x,$$
$$x^2e^x=[x^2a_2+x(2a_2+a_1)+(a_1+a_0)]\,e^x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в многочлене справа и слева. Получим:

$$a_2=1;$$
$$2a_2+a_1=0, \quad \text{откуда} \quad a_1=-2;$$
$$a_1+a_0=0, \quad \text{откуда} \quad a_0=2;$$

окончательно получим, как и раньше,

$$\int x^2e^x\,dx=(x^2-2x+2)\,e^x+C.$$

Аналогичным приемом можно находить интегралы от функций $P_n(x)\cos kx$ и $P_n(x)\sin kx$, где $P_n(x)$ — многочлен. В обоих случаях ответ имеет вид

$$Q_n(x)\cos kx + R_n(x)\sin kx,$$

где $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ — многочлены, степень которых равна n (или меньше n). Примеры такого рода приведены в упражнениях.

Приведем пример интеграла, который удается привести к известным нам интегралам посредством алгебраических преобразований.

Рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$. Заметим, что справедливо тождество

$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{(x-a)(x-b)}.$$

При его помощи получим:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right].$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{a-b}\left[\ln(x-a)-\ln(x-b)\right]+C=\frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b}+C.$$

Существуют приемы, позволяющие интеграл любой алгебраической дроби с целыми степенями переменной выразить при помощи элементарных функций. При этом, однако, в ответе появляются не только алгебраические функции, но и логарифмы и обратные тригонометрические функции (арктангенсы). Общая теория нахождения таких интегралов слишком сложна для нашей книги.

Интегрирование многих функций, содержащих корни и тригонометрические функции, может быть при помощи надлежащей замены переменной сведено к интегрированию многочленов или алгебраических дробей с целыми степенями. Рассмотрим один пример.

Найти $\int x\sqrt{x+1}\,dx$. Сделаем замену переменной: $z=\sqrt{x+1}$, $x+1=z^2$. Отсюда $2z\,dz=dx$. Переходя

к новой переменной в интеграле, получаем:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\int (z^2-1)\,z2z\,dz=2\int (z^4-z^2)\,dz=$$
$$=2\frac{z^5}{5}-2\frac{z^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C.$$

Еще несколько примеров такого рода приведено в упражнениях.

Наконец, приведем пример интеграла, который *не может* быть представлен при помощи конечного числа элементарных функций,

$$f(x)=\int e^{-x^2}\,dx.$$

Доказательство того, что его нельзя выразить при помощи конечного числа элементарных функций, весьма сложно, и мы его приводить не будем.

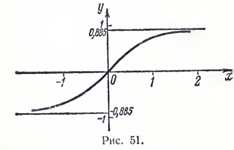


Рис. 51.

Этот интеграл является функцией, свойства которой можно изучить. Из определения $f(x)$ следует, что

$$\frac{df(x)}{dx}=e^{-x^2}.$$

Так как $e^{-x^2}>0$ при любом x, то $f(x)$ — возрастающая функция. Производная максимальна при $x=0$, значит, $f(x)$ имеет максимальный угол касательной с осью x при $x=0$. При x больших по абсолютной величине (положительных и отрицательных) производная $\frac{df}{dx}$ очень мала, значит, функция почти постоянна. График функции $f(x)=\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ изображен на рис. 51 (для определенности нижний предел выбран равным нулю).

Для этой функции составлены подробные таблицы; благодаря им вычисления, в которые входит этот интеграл, не сложнее, чем, например, вычисления с тригонометрическими функциями.

Упражнения

Найти интегралы:

1. $\int x(x-1)^2\,dx$. 2. $\int \frac{x^2+2x-3}{x}\,dx$. 3. $\int \cos(3x-5)\,dx$.

4. $\int \sin(2x+1)\,dx$. 5. $\int \sqrt{3x-2}\,dx$.

Указание. В примерах 3, 4, 5 сделать замену переменной.

6. $\int x\cos x\,dx$. 7. $\int \ln x\,dx$.

Указание. В примерах 6, 7 воспользоваться формулой интегрирования по частям.

8. $\int x^2\sin 2x\,dx$. 9. $\int x^3e^{-x}\,dx$. 10. $\int (x^2+x+1)\cos x\,dx$.

11. $\int (2x^2+1)\cos 3x\,dx$.

Указание. Пример 11 подробно рассмотрен в «Ответах и решениях», остальные три делаются аналогично.

12. $\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x-3)}$.

Указание. Воспользоваться тождеством

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3};$$

числа A и B находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x после освобождения от знаменателя.

13. $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$. 14. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$. 15. $\int \frac{x\,dx}{x+\sqrt{x}}$.

Указание. Сделать замену переменной по формуле $\sqrt{x}=z$.

16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

Указание. Сделать замену переменной $x^2-5=z$.

17. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

Указание. Сделать замену переменной $\cos x=z$.

18. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$.

Указание. Сделать замену переменной $\sin x=z$.

19. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 20. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

Указание. Сделать замену переменной $x=at$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 22. $\int \arcsin x\, dx$. 23. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

24. $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$. 25. $\int e^x \cos 2x\, dx$.

Указание. В прнмерах 22—25 применить ннтегрнрованне по частям.

Общее замечание. Пользуясь различными прнемамн, ниогда получают для одного и того же интеграла различные выражения. Это не должно смущать читателя. Еслн вычисления сделаны верно, такие выражения должны отлнчаться лишь иа постоянную. При нахождении определенного интеграла результаты окажутся однинаковыми.

Проверьте это замечание на прнмере 17, применив замену $\sin x = z$.

§ 16. Замена переменной в определенном интеграле

Рассмотрим пример. Пусть требуется вычислить

$$\int_n^k (ax+b)^2\, dx.$$

Можно поступить следующим образом: вычислить сначала неопределенный интеграл $\int (ax+b)^2\, dx$, а затем составить разность его значений при $x=k$ и при $x=n$.

Для вычисления $\int (ax+b)^2\, dx$ сделаем замену переменной по формуле $z=ax+b$. Тогда $dz = a\, dx$ и

$$\int (ax+b)^2\, dx = \frac{1}{a}\int z^2\, dz = \frac{z^3}{3a} = \frac{(ax+b)^3}{3a}.$$

Поэтому

$$\int_n^k (ax+b)^2\, dx = \left.\frac{(ax+b)^3}{3a}\right|_n^k = \frac{(ak+b)^3-(an+b)^3}{3a}.$$

Можно, однако, действовать иначе. Выясним, как будет изменяться z, когда x изменяется от n до k. Так как z и x связаны формулой $z=ax+b$, то при изменении x от n до k z будет меняться от $an+b$ до $ak+b$. Следовательно,

$$\int_n^k (ax+b)^2\, dx = \frac{1}{a}\int_{an+b}^{ak+b} z^2\, dz = \left.\frac{z^3}{3a}\right|_{an+b}^{ak+b} = \frac{(ak+b)^3-(an+b)^3}{3a}.$$

При нахождении интегралов удобно поступать именно так, т. е., выполняя замену переменной, одновременно находить и новые пределы интегрирования. Тогда в выражении неопределенного интеграла не придется возвращаться назад, к старой переменной.

Рассмотрим примеры.

1. Подсчитаем величину интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)^3}$. Заметим сразу же, что функция $\frac{1}{(2-x)^3}$ при изменении x от 0 до 1 принимает положительные значения, поэтому $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)^3} > 0$; вместе с тем знаменатель в этом промежутке не обращается в нуль, так что подынтегральная функция во всем промежутке конечна. Сделаем замену переменной $2-x=y$, $dx=-dy$. Тогда при $x=0$ $y=2$, при $x=1$ $y=1$ и

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)^3} = -\int\limits_2^1 \frac{dy}{y^3}. \tag{16.1}$$

В первой части (16.1) пределы интегрирования даны уже для y. Читателя может смутить знак минус в последнем равенстве. Действительно, справа и слева стоят интегралы от положительных функций, почему же положительна правая часть (16.1)? Все дело в том, что в интеграле справа нижний предел больше верхнего. Так как при перемене пределов интегрирования интеграл меняет знак, то равенство (16.1) можно записать так:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)^3} = \int\limits_1^2 \frac{dy}{y^3}.$$

Теперь в интеграле справа верхний предел больше нижнего и ясно, что интеграл справа положителен. Вычисления легко довести до конца

$$\int\limits_1^2 \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{2y^2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

2. В § 15 мы рассматривали функцию $f(x)=\int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

Часто приходится иметь дело с функцией $\varphi(a)=\int_0^a e^{-kx^2}\,dx$, где k — постоянное число. Покажем, что между функциями φ и f существует простая зависимость.

В выражении для $\varphi(a)$ сделаем замену переменной по формуле $kx^2=t^2$. Отсюда находим $\sqrt{k}x=t$, $x=\frac{t}{\sqrt{k}}$, $dx=\frac{1}{\sqrt{k}}dt$. При $x=0$ $t=0$, при $x=a$ $t=a\sqrt{k}$. Поэтому получаем:

$$\varphi(a)=\int_0^{a\sqrt{k}} e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^{a\sqrt{k}} e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{k}}f(a\sqrt{k}).$$

Итак, $\varphi(a)=\frac{1}{\sqrt{k}}f(a\sqrt{k})$. Следовательно, для любого значения независимой переменной x

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{k}}f(x\sqrt{k}).$$

Имея таблицу функции $f(x)$, можно найти также интеграл $\varphi(x)$ при любом значении k.

3. В главе I мы видели, что определенный интеграл имеет размерность в случае, если имеют размерность подынтегральная функция и пределы интегрирования. Часто, однако, бывает удобно приводить интеграл к безразмерному виду, вынося все множители, имеющие размерность, за знак интеграла. Покажем, как это можно сделать.

Пусть дан $\int_a^b f(x)\,dx$. Обозначим через f_{max} наибольшее значение функции $f(x)$ на промежутке интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \frac{f(x)}{f_{max}}f_{max}\,dx=f_{max}\int_a^b \frac{f(x)}{f_{max}}\,dx. \qquad (16.2)$$

Ясно, что в последнем интеграле подынтегральная функ-

ция $\frac{f(x)}{f_{max}}$ безразмерна, так как $f(x)$ и f_{max} имеют одинаковую размерность. Перейдем к безразмерным пределам интегрирования. Для этого выполним замену переменной по формуле

$$z=\frac{x-a}{b-a}, \quad \text{или} \quad x=a+z(b-a). \tag{16.3}$$

Из (16.3) видно, что z — безразмерная величина. Так как $dx=(b-a)\,dz$ и $z=0$ при $x=a$, $z=1$ при $x=b$, то интеграл в формуле (16.2) принимает вид

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f_{max}}\,dx=(b-a)\int_0^1 \frac{f[a+z(b-a)]}{f_{max}}\,dz. \tag{16.4}$$

Положим

$$\frac{f[a+z(b-a)]}{f_{max}}=\varphi(z),$$

тогда из (16.4)

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f_{max}}\,dx=(b-a)\int_0^1 \varphi(z)\,dz,$$

окончательно

$$\int_a^b f(x)\,dx=f_{max}\cdot(b-a)\int_0^1 \varphi(z)\,dz. \tag{16.5}$$

В формуле (16.5) $\int_0^1 \varphi(z)\,dz$ есть безразмерная величина.

Если $f(x)$ мало изменяется на промежутке интегрирования, то $\frac{f(x)}{f_{max}}\approx 1$, поэтому

$$\varphi(z)\approx 1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \varphi(z)\,dz\approx 1\cdot\int_0^1 dz=1.$$

Таким образом, в этом случае безразмерный множитель $\int_0^1 \varphi(z)\,dz$ есть число порядка 1 и величина интеграла опре-

деляется главным образом произведением

$$f_{\max}\cdot(b-a).$$

Рассмотрим элементарный пример: свободное падение тела в течение времени t_0. Пусть есть $\int\limits_0^{t_0} v(t)\,dt$. Скорость тела равна $v=gt$, и максимальная скорость достигается к моменту t_0: $v_{\max}=gt_0$.

Заметим, что здесь максимум обусловлен не уменьшением скорости после $t=t_0$, а просто тем, что времена, бо́льшие t_0, не входят в промежуток, по которому ведется интегрирование, $0<t<t_0$. Вводим

$$z=\frac{t}{t_0},\quad \varphi(z)=\frac{v}{v_{\max}}=\frac{gt}{gt_0}=\frac{t}{t_0}=z,$$

$$\int\limits_0^{t_0} v(t)\,dt=v_{\max}t_0\int\limits_0^1 z\,dz=gt_0^2\int\limits_0^1 z\,dz=\frac{gt_0^2}{2}.$$

Рассмотрим в заключение пример, показывающий необходимость внимательного рассмотрения функции и опасность формального подхода. Вычислим $I=\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$, поэтому

$$I=\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_a^b=-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{b-a}{ab}. \qquad (16.6)$$

Так как подынтегральная функция положительна, результат должен быть положителен, если $b>a$. Ответ по формуле (16.6) действительно положителен при $b>a$, если a и b одного знака. Однако для интеграла $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ формула (16.6) дает явно нелепый результат $I=-2$! Причина заключается в том, что подынтегральная функция обращается в бесконечность внутри промежутка интегрирования при $x=0$ и в этом

же месте терпит бесконечный разрыв функция $\left(-\frac{1}{x}\right)$, являющаяся неопределенным интегралом функции $\frac{1}{x^2}$.

Чтобы разобраться в положении, необходимо исключить из всего интервала $-1 < x < +1$ малую область около особой точки $x=0$: $-\varepsilon_1 < x < \varepsilon_2$ (ε_1 и ε_2 — малые положительные числа), и рассмотреть

$$K = \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

По формуле (16.6) получим:

$$K = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = -2 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Ясно, что при ε_1 и ε_2, стремящихся к нулю, $K \to \infty$.

В других случаях интеграл с подынтегральной функцией, обращающейся в бесконечность на интервале интегрирования, может давать вполне определенный конечный результат. Так, например, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$. Для доказательства вычислим $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$; при $\varepsilon \to 0$ интеграл стремится к 2.

Такого рода рассмотрение необходимо всегда при обращении подынтегральной функции в бесконечность.

§ 17. Ряды

Поставим себе задачу построить простое и удобное приближенное выражение функции $y(x)$ (заданной точно какой-либо формулой) на небольшом промежутке изменения аргумента x, например при значениях x, близких к a.

Определение производной, которое было дано в главе I, можно записать в следующем виде:

$$y'(a) = \lim_{x \to a} \frac{y(x) - y(a)}{x - a}.$$

Из этого определения следует, что в пределе, т. е. тем точнее, чем меньше разность $(x-a)$, можно написать:

$$y(x) = y(a) + (x-a)\,y'(a). \qquad (17.1)$$

Эта формула соответствует смыслу производной как скорости изменения функции. Если известно значение функции в данной точке $y(a)$ и скорость изменения функции в этой точке $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=y'(a)$, то при x, близком к a, когда аргумент изменился на величину $(x-a)$ по сравнению с начальным значением a, функция изменяется на $(x-a)y'(a)$. Выражение (17.1) является приближенным, и точность его тем меньше, чем больше промежуток $(x-a)$. Действительно, при расчете изменения функции по формуле $(x-a)y'(a)$ мы пользовались значением скорости изменения функции $y'(a)$ в начале промежутка от a до x. Между тем на этом промежутке сама скорость y' также меняется. Точная формула имеет вид

$$y(x)=y(a)+\int_a^x y'(t)\,dt. \qquad (17.2)$$

Применим формулу (17.1) к производной $y'(x)$. Тогда

$$y'(x)=y'(a)+(x-a)y''(a). \qquad (17.3)$$

Прежде чем идти дальше, напомним читателю, что $y''(x)$ — вторая производная функция y по x, обозначаемая также $\frac{d^2y}{dx^2}$, есть производная по x от $y'(x)$

$$y''(x)=\frac{dy'}{dx},$$

так что y'' связана с y' таким же образом, как y' связана с y. Аналогично определяется y''' — третья производная,

$$y'''=\frac{dy''}{dx},$$

y^{IV} — четвертая производная, y^{V} — пятая производная и т. д. Производная n-го порядка, которая получается в результате n-кратного последовательного взятия производной функции $y(x)$, обозначается $y^{(n)}(x)$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$. В обозначении $y^{(n)}$ значок n ставится в скобки, чтобы отличить его от показателя степени.

Вернемся к задаче приближенного выражения функции. Формула (17.3) для производной есть не что иное, как формула (17.1), в которую вместо $y(x)$ подставлена

функция $y'(x)$. Подставим выражение производной (17.3) в формулу (17.2). Тогда

$$y(x)=y(a)+\int_a^x [y'(a)+(t-a)y''(a)]\,dt = \\ = y(a)+(x-a)y'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}y''(a). \quad (17.4)$$

Эта формула точнее выражения (17.1). При выводе (17.1) предполагалось (в первом приближении), что скорость изменения функции y, т. е. ее производная y', постоянна и равна значению производной при $x=a$. При этом получилась линейная зависимость y от x *). При выводе формулы (17.4) учтено, что производная $y'(x)$ непостоянна, но изменение $y'(x)$ учтено лишь приближенно: формула (17.3), которой мы пользовались в ходе вывода формулы (17.4), подразумевает постоянство $y''(x)$, что и приводит к линейной зависимости y' от x; при этом для $y(x)$ получается квадратичная зависимость.

Уточним еще формулу (17.4). Для этого следует учесть, что и y'' непостоянна. Воспользуемся формулой

$$y'(x)=y'(a)+\int_a^x y''(t)\,dt. \quad (17.5)$$

Она получается из (17.2) заменой y на y'. Заметим также, что эту формулу (как и (17.2)) легко проверить, подсчитав входящий в нее интеграл. Запишем теперь $y''(x)$ по формуле типа (17.1), примененной к $y''(x)$,

$$y''(x)=y''(a)+(x-a)y'''(a). \quad (17.6)$$

Тогда из формул (17.5) и (17.6) получим:

$$y'(x)=y'(a)+\int_a^x [y''(a)+(t-a)y'''(a)]\,dt$$

или

$$y'(x)=y'(a)+y''(a)(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2}y'''(a). \quad (17.7)$$

*) В выражение для y (17.1) x входит только в первой степени. Иначе говоря, y есть многочлен первой степени от x. Такая зависимость называется линейной, потому что графически она изображается прямой линией (см. главу IV, § 4).

Заметим, что формула (17.7) есть формула типа (17.4), записанная для $y'(x)$.

Выражение для $y'(x)$ из (17.7) подставим в (17.2):

$$y(x) = y(a) + \int_a^x \left[y'(a) + y''(a)(t-a) + y'''(a)\frac{(t-a)^2}{2} \right] dt =$$

$$= y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{2\cdot 3}(x-a)^3. \quad (17.8)$$

Теперь легко представить себе, какой вид будут иметь формулы для $y(x)$, если еще продолжать процесс уточнения: если учесть, что y''' непостоянна, то в формулу войдет $y^{IV}(a)$; выражение для $y(x)$ будет содержать $(x-a)^4$. Каждый следующий шаг по уточнению $y(x)$ дает дополнительный член с более высокой степенью $(x-a)$.

Этот закон проявляется со всей очевидностью, если сравнить уже полученные нами выражения. В самом грубом приближении, если $x-a$ мало́, можно считать $y(x) = y(a)$; для этого не нужно знать высшей математики. Назовем это равенство «нулевым приближением», выражение (17.1) — «первым приближением», выражение (17.4) — «вторым приближением», выражение (17.8) — «третьим приближением» и выпишем упомянутые формулы рядом:

$y(x) = y(a)$ (нулевое приближение),

$y(x) = y(a) + (x-a)y'(a)$ (первое приближение),

$y(x) = y(a) + (x-a)y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}y''(a)$ (второе приближение),

$y(x) = y(a) + (x-a)y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}y''(a) + \frac{(x-a)^3}{2\cdot 3}y'''(a)$ (третье приближение).

Легко догадаться, какой вид будет иметь результат, если все дальше уточнять формулы. Каждое следующее приближение содержит на одно слагаемое больше, чем предыдущее приближение, т. е. чем больше степеней $(x-a)$ входит в формулу, тем она точнее.

Формулу такого вида можно получить и несколько другим способом.

Возьмем точное равенство (17.2) и проинтегрируем его по частям, заменив *) сперва под интегралом dt на $d(t-x)$:

$$y(x)=y(a)+\int_a^x y'(t)\,dt=y(a)+\int_a^x y'(t)\,d(t-x)=$$

$$=y(a)+y'(t)(t-x)\Big|_a^x-\int_a^x (t-x)\,y''(t)\,dt=$$

$$=y(a)+(x-a)\,y'(a)+\int_a^x (x-t)\,y''(t)\,dt. \qquad (17.9)$$

Проводя интегрирование по частям n раз, мы получим точное выражение для $y(x)$, состоящее из $n+2$ членов. Первые $n+1$ членов совпадают с n-м приближением предыдущего вывода. Последний член дает выражение остатка в виде интеграла от $(n+1)$-й производной функции $y(x)$

$$y(x)=y(a)+(x-a)\,y'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\,y''(a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-a)^n}{2\cdot 3\ldots n}\,y^{(n)}(a)+\frac{1}{2\cdot 3\ldots n}\int_a^x (x-t)^n\,y^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (17.10)$$

Без последнего члена с интегралом формула является приближенной. В общем случае произвольной функции $y(x)$ никакое конечное число степеней $(x-a)$ не даст абсолютно точной формулы **). Точную формулу может дать только выражение, содержащее бесчисленное множество степеней $(x-a)$:

$$y(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+c_n(x-a)^n\ \ldots \qquad (17.11)$$

Выражение такого вида называется бесконечным рядом. Обычно слово «бесконечный» опускают и говорят просто «ряд».

Коэффициенты c_0, c_1, ..., c_n, ... различны для различных функций. Они зависят также от значения величины a.

*) При интегрировании t есть переменная (немая), x рассматривается как постоянная, поэтому $dt=d(t-x)$ и замена допустима.

**) Кроме случая многочлена, см. конец § 18.

Эти коэффициенты можно найти более быстрым (по сравнению с приведенным выводом) способом. Для этого поступим следующим образом. Запишем равенство (17.11) и вычислим первую, вторую и ... n-ю производные от обеих его частей:

$$y(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots$$
$$\ldots + c_n(x-a)^n + \ldots,$$
$$y'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots,$$
$$y''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \ldots n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}(x) = n(n-1)\ \ldots\ 3\cdot 2c_n + (n+1)n(n-1)\ \ldots$$
$$\ldots 3\cdot 2c_{n+1}(x-a) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Каждое из написанных выше равенств позволяет определить один из коэффициентов c_i. Действительно, положим в каждом из этих равенств справа и слева $x = a$. При этом все члены, содержащие множители $(x-a)$, обратятся в нуль и мы получим уравнения для определения коэффициентов:

$$y(a) = c_0, \qquad \text{откуда} \qquad c_0 = y(a),$$
$$y'(a) = c_1, \qquad c_1 = y'(a),$$
$$y''(a) = 2c_2, \qquad c_2 = \frac{1}{2}y''(a),$$
$$y'''(a) = 3\cdot 2c_3, \qquad c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}y'''(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^n(a) = n(n-1)\ \ldots\ 3\cdot 2\cdot c_n, \qquad c_n = \frac{y^{(n)}(a)}{2\cdot 3\ \ldots\ (n-1)n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Таким образом, получаем:

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{2\cdot 3}(x-a^3) + $$
$$+ \frac{y^{\text{IV}}(a)}{2\cdot 3\cdot 4}(x-a)^4 + \ldots + \frac{y^{(n)}(a)}{2\cdot 3\ldots(n-1)n}(x-a)^n + \ldots \quad (17.12)$$

Первые n членов этой формулы и формулы (17.10) совпадают. Отметим еще частный случай формулы, когда $a = 0$,

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{2\cdot 3}x^3 + \ldots \quad (17.13)$$

Для произведения последовательных натуральных чисел $n(n-1)\ \ldots\ 3\cdot 2$ есть удобное обозначение $n!$ (читается эн-факториал, по-латыни фактор — сомножитель). Таким образом, например $3! = 3\cdot 2 = 6$; $4! = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$; $5! = 120$. Принято при определении факториала приписывать в числе сомножителей еще 1:

$$n! = n(n-1)\ \ldots\ 3\cdot 2\cdot 1;$$

от этого, очевидно, произведение не меняется, зато удобнее запомнить: $n!$ есть произведение n последовательных натуральных чисел от n до 1. Например, $3!$ есть произведение трех множителей, $3\cdot 2\cdot 1$, от 3 до 1. При этом определении, естественно, получим $1! = 1$. При помощи таких обозначений запишем формулы (17.12) и (17.13) в удобной сжатой форме:

$$y(x) = y(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{y^n(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad (17.14)$$

$$y(x) = y(0) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{y^n(0)}{n!} x^n. \qquad (17.15)$$

Формулы (17.14) и (17.15) дают разложение функции $y(x)$ в ряд по целым степеням $x-a$ (или x). Формула (17.14) называется рядом Тейлора, (17.15) называется рядом Маклорена. Пусть, например, $y(x) = e^x$. Тогда

$$y' = e^x;\quad y'' = e^x;\ \ldots;\quad y^{(n)} = e^x;\ \ldots$$

Воспользуемся формулой (17.15) ряда Маклорена. В нашем случае

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = 1.$$

Подставляя в (17.15), получим разложение функции $y = e^x$ в ряд по степеням x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Рассмотрим формулу, которая получается из ряда Тейлора, если ограничиться, например, тремя членами,

$$y(x) = y(a) + (x-a)y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} y''(a).$$

Раскроем в правой части скобки и расположим результат по степеням x

$$y(x)=\left[y(a)-ay'(a)+\frac{1}{2}a^2y''(a)\right]+[y'(a)-ay''(a)]\,x+\\+\frac{1}{2}y''(a)\,x^2. \quad (17.16)$$

Справа в (17.16) стоит многочлен второй степени. Обращаем внимание читателя на то, что это выражение не совпадает с тем, что получится, если взять три члена в ряде Маклорена,

$$y(x)=y(0)+y'(0)\,x+\frac{y''(0)}{2}x^2. \quad (17.17)$$

Это станет понятным, если вспомнить, что формула (17.16) дает хороший результат, если x близко к a, а формула (17.17) хороша, если x близко к нулю.

В главе I было дано определение производной как предела отношения приращения функции к приращению независимой переменной.

Теперь, после того как построено выражение функции в виде ряда, можно дать общий ответ на вопрос о том, как, по какому закону отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приближается к $\frac{dy}{dx}$ при стремлении Δx к нулю.

Возьмем ряд Тейлора и обозначим $(x-a)=\Delta x$. При этом $y(x)-y(a)=\Delta y$. Получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(a)+\frac{1}{2}y''(a)\,\Delta x+\frac{1}{6}y'''(a)\,(\Delta x)^2+\ldots$$

При малых Δx второй член с Δx больше третьего члена с $(\Delta x)^2$. Пренебрегая последним, придем к выводу, что отличие отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ от значения производной на краю промежутка пропорционально величине промежутка Δx и второй производной $y''(a)$. При этом мы сравниваем отношение приращения на участке от $x=a$ до $x=a+\Delta x$ с производной на краю участка $y'(a)$.

Производную можно вычислять и иначе: возьмем приращение при изменении x от $a-\frac{\Delta x}{2}$ до $a+\frac{\Delta x}{2}$ и, поделив

на Δx, сравним это отношение с производной $y'(a)$, т. е. с производной в середине участка. Получим:

$$\Delta y = f\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(a-\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$f\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right) = f(a) + \frac{\Delta x}{2} f'(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 f''(a) + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 f'''(a),$$

$$f\left(a-\frac{\Delta x}{2}\right) = f(a) - \frac{\Delta x}{2} f'(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 f''(a) - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 f'''(a);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \frac{2}{6\cdot 2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 f'''(a) = f'(a) + \frac{(\Delta x)^2}{24} f'''(a).$$

Такой способ гораздо точнее: разность между отношением приращений и производной пропорциональна $(\Delta x)^2$, а не (Δx), и к тому же содержит коэффициент $\frac{1}{24}$.

Упражнения

1. Разложить полином третьей степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ в ряд по $x - x_0$. Сравнить первые два, три, четыре члена с полиномом.

2. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = xe^x$; проверить, что ее разложение можно получить из разложения e^x.

3. Разложить функцию e^x в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

4. Найти численно производную функции e^x при $x=0$, задаваясь интервалом $\Delta x = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8}$.

5. Выяснить точность формулы $(1+r)^m = e^{mr}$. Для этого записать ее в левую часть в виде $(1+r)^m = e^{m \ln(1+r)}$ и разложить $\ln(1+r)$ в ряд.

§ 18. Вычисление значений функций при помощи рядов

Остановимся вкратце на принципах, положенных в основу формул § 17. В начале изучения высшей математики мы считали известным понятие функции и исходили из того, что можем вычислить значение функции при любом значении аргумента. Поэтому при рассмотрении производных мы находили их непосредственно, так сказать, опытным путем, вычисляя значения функции при близких значениях аргу-

мента. Потом мы научились находить производные по формулам, и оказалось, что составление формул для производных — довольно простое дело. Поэтому вычисление значений функций при помощи формулы, в которую входят производные, оказывается часто даже более простым, чем прямое вычисление функции.

Так как только в случае многочлена ряд Тейлора обрывается, содержит конечное число членов, то любая функция, отличная от многочлена, будет представлена бесконечным рядом. Практическая ценность такого ряда для вычислений связана с возможностью ограничиться двумя-тремя членами ряда и получить достаточно точный результат. Для этого необходимо, чтобы отброшенные члены ряда не были велики.

Рассмотрим несколько простейших примеров. Пусть $y=e^x$. В предыдущем параграфе была получена формула

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (18.1)$$

В частности, подставляя $x=1$, получим выражение числа e в виде ряда

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \qquad (18.2)$$

Эта формула позволяет быстро и с большой точностью вычислять e^x, что можно видеть из табл. 2.

Таблица 2

x	e^x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$
0,10	1,1052	1,10	1,1050	1,1052	1,1052
0,25	1,2840	1,25	1,2812	1,2838	1,2840
0,50	1,6487	1,50	1,6250	1,6458	1,6484
0,75	2,1170	1,75	2,0312	2,1015	2,1147
1,00	2,7183	2,00	2,5000	2,6667	2,7083
1,25	3,4903	2,25	3,0312	3,3568	3,4585
1,50	4,4817	2,50	3,6250	4,1876	4,3986
2,00	7,3891	3,00	5,0000	6,3333	7,0000

Первые два члена формулы дают точность 0,5% при $x = 0{,}1$.

Первые три члена формулы дают точность 1,4% при $x = 0{,}5$.

Первые четыре члена формулы дают точность 1,8% при $x = 1{,}0$.

Такая хорошая точность связана, очевидно, с тем, что члены ряда быстро убывают. Каждый следующий член ряда меньше предыдущего, прежде всего, потому, что знаменатель $(n+1)$-го члена в n раз больше знаменателя предыдущего n-го члена. Если $x < 1$, то к этому добавляется еще тот факт, что x^n тем меньше, чем больше n.

Но даже при $x > 1$ в далеких членах ряда увеличение знаменателя обязательно пересиливает увеличение числителя. Как видно из таблицы 2, при $x = 2$ сумма пяти членов ряда дает ошибку 5%, если же добавить шестой член $\left(\frac{x^5}{120}\right)$, то получим 7, 3500. Ошибка составляет 0,5%.

Построим формулы такого же типа для тригонометрических функций

$$y(x) = \sin x; \quad y'(x) = \cos x; \quad y''(x) = -\sin x;$$
$$y'''(x) = -\cos x; \quad y^{\text{IV}}(x) = \sin x.$$

Закон для последующих производных очевиден.

Подставляя $x = 0$, получим:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -1 \ldots$$

Следовательно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots \tag{18.3}$$

Аналогично получим формулу

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots \tag{18.4}$$

На рис. 52 и 53 показаны графики синуса, косинуса, а также графики многочленов, которые получаются, если брать один, два или три члена соответствующего ряда. Видно, как улучшается точность по мере того, как мы берем все большее число членов ряда.

В табл. 3 и 3а приведены численные результаты для синуса и косинуса соответственно. Как видно из таблиц, достаточно двух-трех членов ряда, чтобы получить прекрасную точность в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Таким образом,

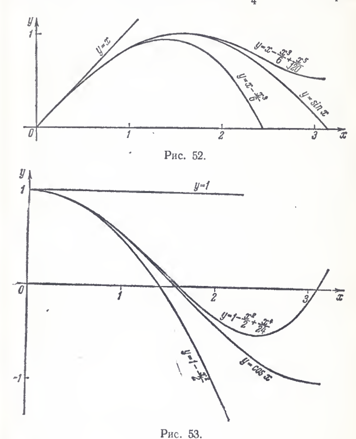


Рис. 52.

Рис. 53.

степенный ряд дает очень удобный практический способ вычисления значений тригонометрических функций. Заметим, что по абсолютной величине не равные нулю члены ряда для синуса и косинуса в точности равны соответствующим

Таблица 3

x	φ *)	$\sin x$	x	$x-\frac{x^3}{6}$	$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$
0	0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\frac{\pi}{20}$	9°	0,1564	0,1571	0,1564	0,1564
$\frac{\pi}{10}$	18°	0,3090	0,3142	0,3090	0,3090
$\frac{3\pi}{20}$	27°	0,4540	0,4712	0,4538	0,4540
$\frac{4\pi}{20}$	36°	0,5878	0,6283	0,5869	0,5878
$\frac{5\pi}{20}$	45°	0,7071	0,7854	0,7046	0,7071
$\frac{6\pi}{20}$	54°	0,8090	0,9425	0,8029	0,8091
$\frac{7\pi}{20}$	63°	0,8910	1,0996	0,8780	0,8914
$\frac{8\pi}{20}$	72°	0,9510	1,2566	0,9258	0,9519
$\frac{9\pi}{20}$	81°	0,9877	1,4137	0,9427	0,9898
$\frac{\pi}{2}$	90°	1,0000	1,5708	0,9248	1,0045

*) φ — угол, соответствующий x, но выраженный в градусах.

членам ряда функции e^x. Поэтому все сказанное об убывании членов с высокими степенями x в формуле (18.1) для e^x относится и к рядам для синуса и косинуса (18.3) и (18.4).

Заметим, что если подставить в выражение (18.1) $x=\varphi\sqrt{-1}$, а в выражениях (18.3) и (18.4) заменить x на φ, то получится соотношение $e^{\varphi\sqrt{-1}}=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi$, упомянутое на стр. 151.

Если функция $y(x)$ есть многочлен степени n, то $y'(x)$ есть многочлен степени $(n-1)$, $y''(x)$ — многочлен степени $(n-2)$, ..., $y^{(n)}(x)$ — постоянная величина, а $y^{(n+1)}(x)$ и все производные более высокого порядка — нули. Поэтому для

Таблица 3а

x	φ	$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2}$	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}$
0	0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\frac{\pi}{20}$	9°	0,9877	0,9877	0,9877	0,9877
$\frac{\pi}{10}$	18°	0,9510	0,9506	0,9510	0,9510
$\frac{3\pi}{20}$	27°	0,8910	0,8890	0,8911	0,8910
$\frac{4\pi}{20}$	36°	0,8090	0,8026	0,8091	0,8090
$\frac{5\pi}{20}$	45°	0,7071	0,6916	0,7075	0,7071
$\frac{6\pi}{20}$	54°	0,5878	0,5558	0,5887	0,5877
$\frac{7\pi}{20}$	63°	0,4540	0,3954	0,4563	0,4539
$\frac{8\pi}{20}$	72°	0,3090	0,2105	0,3144	0,3089
$\frac{9\pi}{20}$	81°	0,1564	0,0007	0,1672	0,1561
$\frac{\pi}{2}$	90°	0,0000	−0,2337	0,0200	−0,0009

многочлена ряд Тейлора (17.14) обрывается, он состоит из конечного числа членов. Мы получаем многочлен, расположенный по степеням $(x-a)$. При этом для многочленов n-й степени сумма первых $n+1$ членов ряда Тейлора дает *точное* равенство, верное при любых x, а не только при x, близких к a.

§ 19. Условие применимости рядов. Геометрическая прогрессия

Формулы, в которых функции представляются как суммы ряда степеней x с постоянными коэффициентами, были составлены в предыдущем параграфе для трех функций: e^x, $\sin x$ и $\cos x$. В этих трех случаях оказалось, что при

любом x каждый следующий член ряда, исключая, может быть, несколько первых членов, меньше предыдущего и чем больше номер члена, тем ближе этот член к нулю. В этих примерах при любом x можно вычислить значение функции при помощи ряда, если взять достаточное число членов ряда, так чтобы отброшенные члены практически не влияли на результат.

Напомним, что мы начинали с задачи о приближенном выражении функции в малой области изменения переменной и строили все более точные формулы с учетом первой, второй, третьей и т. д. производных. Точность каждой формулы

$$y(x)=y(a), \tag{0}$$

$$y(x)=y(a)+(x-a)y'(a), \tag{I}$$

$$y(x)=y(a)+(x-a)y'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}y''(a) \tag{II}$$

тем больше, чем меньше величина $(x-a)$. С другой стороны, при данном $(x-a)$ формула (I) точнее формулы (0), формула (II) точнее формулы (I) и т. д. Значит, увеличение числа членов ряда позволяет увеличивать величину $(x-a)$, сохраняя заданную точность.

Вопрос заключается в том, всегда ли можно будет достичь заданной точности при любом значении $(x-a)$ путем увеличения числа членов ряда. На очень важном примере мы убедимся сейчас, что это не так. Степенной ряд, построенный так, чтобы дать хорошее приближение в малой области изменения x, при любых $(x-a)$ может иметь естественный предел применимости, предел допустимого увеличения $(x-a)$ (не зависящий от числа взятых членов ряда), хотя этого и не было в примерах предыдущего параграфа.

Рассмотрим функцию

$$y=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}.$$

Вычисляя последовательно производные, найдем:

$$y'=\frac{1}{(1-x)^2}; \quad y''=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}; \quad \ldots; \quad y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Подставляя $x=0$, получим:

$$y(0)=1; \quad y'(0)=1; \quad y''(0)=2; \quad \ldots; \quad y^{(n)}(0)=n!.$$

Таким образом получим ряд

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \qquad (19.1)$$

Пример функции $\frac{1}{1-x}$ замечателен не только необычайно простым видом получившегося степенного ряда (все коэффициенты равны 1). В этом случае нетрудно дать точную формулу для суммы n первых членов ряда (19.1)

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}. \qquad (19.2)$$

В справедливости этой формулы убедимся, умножая обе части (19.2) на $(1-x)$. Формулу (19.3) можно переписать так:

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}. \qquad (19.3)$$

Сравнивая (19.3) с формулой (19.1), видим, что $\frac{x^n}{1-x}$ есть та величина, которой мы пренебрегаем, если ограничиваемся первыми n членами ряда

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \qquad (19.4)$$

Если $-1<x<1$, то x^n тем ближе к нулю, чем больше n, и следовательно, взяв достаточно много членов ряда, мы отбрасываем малую величину. Заметим, что чем ближе x к 1, тем больше членов ряда приходится брать для получения заданной точности.

Вся картина изменится, если взять $x>1$. В этом случае каждый следующий член ряда (19.4) больше предыдущего. Формула (19.3) остается в силе, однако при $x>1$ x^n неограниченно растет вместе с ростом n и поэтому дробью $\frac{x^n}{1-x}$ пренебрегать никак нельзя. Формула (19.1) в этом случае неверна. Нет даже никакого качественного сходства между суммой положительных слагаемых (19.4) и отрицательной (так как $x>1$) величиной $\frac{1}{1-x}$. Из формулы (19.3) видим, что при $x>1$ сумма ряда (19.4) неограниченно увеличивается при увеличении n. Такие ряды называют расходящимися.

Члены ряда (19.4) образуют геометрическую прогрессию. Мы установили, что сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна $\frac{1}{1-x}$, если $|x|<1$. Если же $x \geqslant 1$,

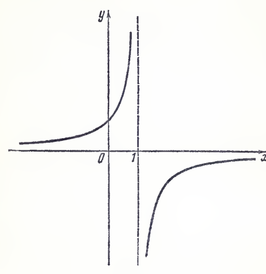


Рис. 54.

то бесконечная геометрическая прогрессия не имеет конечной суммы.

Отметим еще, что любая периодическая дробь представляет собой сумму членов геометрической прогрессии, например,

$$1,(1)=1,111\ldots=1+0,1+0,01+0,001+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{0,9}=\frac{10}{9}=1\ \frac{1}{9}.$$

Таким образом, с простейшим рядом (геометрической прогрессией) мы встречались уже и раньше, в арифметике и алгебре.

Функция $y=\frac{1}{1-x}$ (рис. 54) терпит разрыв при $x=1$: если x близок к 1, но больше 1, то $\frac{1}{1-x}$ — большое по аб-

солютной величине отрицательное число; если x близок к 1, но меньше 1, то $\frac{1}{1-x}$ — большое положительное число. Следовательно, при переходе x через значение $x=1$ функция $\frac{1}{1-x}$ переходит от больших положительных чисел к большим по абсолютной величине отрицательным числам. Этой особенности поведения функции ряд описать не может.

Отметим еще следующее обстоятельство: при $x=1$ функция $y=\frac{1}{1-x}$ обращается в бесконечность (чем ближе x к 1, тем больше y по абсолютной величине), и при этом же $x=1$ члены ряда (19.4) перестают убывать. Ряд может быть пригоден для вычислений, лишь если его члены убывают по абсолютной величине *). При $x=1$ ряд для вычислений непригоден, так как его члены не убывают. Значит, ряд непригоден для вычисления значений функции и при $x=-1$ (так как при $x=-1$ его члены тоже не убывают по абсолютной величине), хотя сама функция при $x=-1$ разрыва не испытывает и равна $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$.

Как бы мы ни выбирали коэффициенты многочлена, его график всегда будет сплошной, непрерывной, линией; у многочлена нет разрывов. Поэтому если некоторая функция $f(x)$ терпит разрыв при $x=x_0$ $\left(\text{в примере с } \frac{1}{1-x},\ x_0=1\right)$, то при значении $x=x_0$ ряд, составленный для $f(x)$, заведомо непригоден для вычислений. Так как любой член ряда c_nx^n тем больше по абсолютной величине, чем больше абсолютная величина x, то при любом x, по абсолютной величине большем, чем x_0, ряд также непригоден для вычислений.

Таким образом, при наличии разрыва $f(x)$ можно заранее указать такое x_0, что при всех x, больших x_0 по абсолютной величине, ряд будет непригоден для вычислений.

Отметим, что наличие разрыва функции является достаточным условием для того, чтобы ряд переставал сходиться, но не необходи-

*) Конечно, если один-два или несколько первых членов ряда возрастают, это не составляет беды, если следующие дальше члены ряда быстро убывают; см. пример с e^x при $x=2$, табл. 2.

мым. В качестве примера рассмотрим функцию $y=\frac{1}{1+x}$. Применяя формулу (17.13), найдем:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots \qquad (19.5)$$

Возьмем, например, $x=2$. Тогда

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=2}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

Сумма же членов ряда

$$1-x+x^2-x^3+\dots \qquad (19.6)$$

резко изменяется в зависимости от изменения числа членов n:

n	1	2	3	4	5	6	7
сумма членов	1	—1	3	—5	11	—21	43

Ясно, что при $x=2$ такой ряд непригоден для вычислений. Почему же это произошло? Ведь сама функция $y=\frac{1}{1+x}$ ни при $x=2$ и нигде от $x=0$ до $x=2$ разрыва не испытывает (рис. 55).

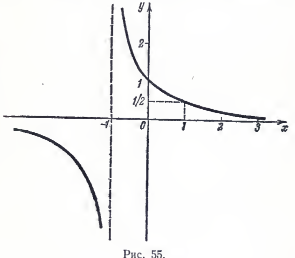


Рис. 55.

Функция $y=\frac{1}{1+x}$, однако, испытывает разрыв при $x=-1$. Поэтому при $x=-1$ члены ряда (19.6) не убывают. Заметим еще, что абсолютные величины членов ряда (19.6) не зависят от знака x.

Следовательно, и при $x=1$, и тем более при $x>1$ ряд для вычисления непригоден.

Поэтому даже если нас интересует поведение ряда только при $x>0$, то все равно надо принимать во внимание все значения x, в том числе и отрицательные, при которых разлагаемая функция терпит разрыв.

На самом деле на сходимость ряда влияет даже поведение функции при комплексных значениях аргумента. Приведем пример. Заменив в формуле (19.5) x на x^2, получим:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots \qquad (19.7)$$

График функции $y=\frac{1}{1+x^2}$ (рис. 56) не имеет никаких разрывов, нигде не уходит в бесконечность ни при положительных, ни при

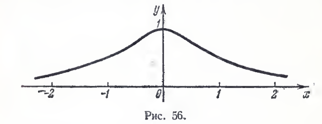


Рис. 56.

отрицательных x. Однако ряд (19.7) пригоден для вычислений, лишь если $x^2<1$, т. е. при $-1<x<1$. Причина этого в том, что при $x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$, т. е. при $x^2=-1$, функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ обращается в бесконечность, поэтому члены ряда не убывают по абсолютной величине при $x^2=-1$. Значит по абсолютной величине они не убывают и при $x^2=1$. Однако подробно и понятно вопрос о поведении функции при комплексных значениях x в данной книге разъяснить невозможно. Интересующегося читателя можно отослать, например, к книге Я. Б. Зельдовича и А. Д. Мышкиса «Элементы прикладной математики».

Рассмотрим еще один пример. Найдем ряд Маклорена для функции $y=\operatorname{tg} x$. По общим правилам находим:

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}\,;\quad y'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\,;\quad y''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,;$$

$$y'''(x)=\frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}\,;\quad y^{\mathrm{IV}}(x)=\frac{16\sin x+8\sin^3 x}{\cos^5 x}\,;$$

$$y^{\mathrm{V}}=\frac{16+88\sin^2 x+16\sin^4 x}{\cos^6 x}\,.$$

Отсюда

$$y(0)=0;\quad y'(0)=1;\quad y''(0)=0;$$
$$y'''(0)=2;\quad y^{\mathrm{IV}}(0)=0;\quad y^{\mathrm{V}}(0)=16.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} x=0+1\cdot x+0\cdot x^2+\frac{2}{3\cdot 2\cdot 1}x^3+0\cdot x^4+\frac{16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^5+\ldots$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{7}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots \qquad (19.8)$$

В последнем выражении коэффициенты при x^7 и x^9 могут быть получены так же, как получены в тексте коэффициенты при x, x^3, x^5.

Что можно сказать об области применимости ряда (19.8)? Глядя на график тангенса (см. рис. 48), легко сообразить, что ряд (19.8) может быть пригоден для вычислений лишь при $|x|<\frac{\pi}{2}$, так как при $x=\frac{\pi}{2}$ функция $\operatorname{tg} x$ ведет себя так же плохо, как функция $\frac{1}{1-x}$ при $x=1$.

Глядя на сам ряд $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$, было бы нелегко сказать, при каком значении x этот ряд нельзя будет применять, потому что закон, которому подчиняются коэффициенты ряда, не простой, в отличие от рассмотренного выше ряда $1+x+x^2+\ldots$

Упражнения

1. Написать ряд Маклорена для функции $y=\frac{x+1}{1-x}$.
2. Написать ряд Маклорена для функции $y=\ln(1+x)$.
3. Написать ряд Тейлора для функции $y=\ln x$ по степеням $(x-1)$. Какова область применимости рядов, полученных в задачах 1—3?
4. Получить первые три члена разложения в ряд по степеням x произведения функции $f(x)\ g(x)$. Построить тот же ряд перемножением ряда для $f(x)$ и ряда для $g(x)$.

§ 20. Бином Ньютона для целых и дробных показателей

Составим разложение в ряд Маклорена произвольной степени m двучлена $(a+x)$: $y=(a+x)^m$.

По общему правилу найдем сперва производные

$$\left.\begin{array}{l} y'=m(a+x)^{m-1},\ y''=m(m-1)(a+x)^{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)(a+x)^{m-n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (20.1)$$

и значения функции и производных при $x=0$

$$\left.\begin{aligned} &y(0)=a^m,\ y'(0)=ma^{m-1},\\ &y''(0)=m(m-1)a^{m-2},\ \ldots,\\ &y^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1)a^{m-n},\ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (20.2)$$

Отсюда получим ряд Маклорена

$$(a+x)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n+\ldots \qquad (20.3)$$

Если показатель степени m есть положительное целое число, то $(a+x)^m$ есть многочлен степени m, так что в этом случае ряд (20.3) будет конечным: производная $(m+1)$-го порядка функции $(a+x)^m$, а значит, и все более высокие ее производные равны нулю. Формулы (20.1), (20.2), (20.3) отражают это обстоятельство; в самом деле, при $n=m+1$ множитель $(m-n+1)$ обращается в нуль; при $n>m+1$ где-то в последовательности множителей $m(m-1)\ldots$ найдется множитель, равный нулю, и, следовательно, произведение равно нулю.

При целом положительном m произведение в числителе можно записать в более удобной форме:

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)=$$
$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(m-n)(m-n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

Таким образом, при целом положительном m получим окончательно:

$$(a+x)^m=a^m+\frac{m!}{1!(m-1)!}a^{m-1}x+\frac{m!}{2!(m-2)!}a^{m-2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m!}{n!(m-n)!}a^{m-n}x^n+\ldots+\frac{m!}{(m-2)!2!}a^2x^{m-2}+$$
$$+\frac{m!}{(m-1)!1!}ax^{m-1}+x^m. \qquad (20.4)$$

В формуле (20.4) справа и слева написаны многочлены степени m. Таким образом, для случая целого положительного m мы получаем точное равенство, справедливое при любых значениях x. Формула (20.4) симметрична относительно x и a: коэффициенты при членах $a^{m-n}x^n$ и a^nx^{m-n}

равны. Это понятно, так как $(x+a)^m$ не зависит от порядка слагаемых в скобке

$$(x+a)^m=(a+x)^m.$$

Формула (20.4) называется биномом Ньютона. Ее можно получить, не пользуясь высшей математикой и производными. Для этого нужно взять произведение $\underbrace{(a+x)(a+x)\ldots(a+x)}_{m\ \text{раз}}$, выполнить умножение и привести подобные члены. Однако при m, заданном в общем виде буквой, а не числом, приведение подобных членов становится довольно трудным, и в целом вывод бинома Ньютона при помощи ряда Маклорена оказывается проще.

Отметим, что Ньютон получил общую формулу (20.3), т. е. разложение $(x+a)^m$, в случае любых показателей m. Поэтому правильнее было бы именно формулу (20.3) называть формулой бинома Ньютона, а не (20.4), которая представляет собой простой частный случай формулы (20.3).

Вернемся к общей формуле (20.3). Пусть m не целое положительное. В ряде Маклорена (20.3) степени переменной x, т. е. числа n, целые положительные. Значит, в (20.3), если m не положительное целое, числитель не обращается в нуль ни при каком n, формула (20.3) дает бесконечный ряд. В частности, для $m=-1$ этот ряд имеет вид

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\ldots \tag{20.5}$$

Заметим, что при $a=1$ формула (20.5) переходит в уже знакомую нам формулу

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Из формулы (20.5) находим также

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\ldots$$

Для $m=\frac{1}{2}$ получим:

$$\sqrt{a+x}=\sqrt{a}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{a}}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{16}\frac{x^3}{a^2\sqrt{a}}-$$
$$-\frac{5}{128}\frac{x^4}{a^3\sqrt{a}}+\frac{7}{256}\frac{x^5}{a^4\sqrt{a}}-\frac{21}{1024}\frac{x^6}{a^5\sqrt{a}}+\ldots \tag{20.6}$$

В разложении $(a+x)^m$ при любом m все члены имеют одинаковую сумму степеней a и x, каждый следующий член отличается от предыдущего множителем $\left(\frac{x}{a}\right)$ и коэффициентом. Физик сказал бы, что a и x в формуле (20.3) должны быть одинаковой размерности, значит, $\frac{x}{a}$ безразмерно. Можно было с самого начала вынести за скобку a

$$(a+x)^m = a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$$

и разлагать $\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ по степеням $\frac{x}{a}$.

Оказывается, что при всех m (отрицательных и дробных положительных) ряд (20.3) пригоден лишь при $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, т. е. при $|x| < |a|$. При $\left|\frac{x}{a}\right| \geqslant 1$ ряд (20.3)—расходящийся. Исключение представляют целые положительные m, потому что в этом случае формула (20.3) содержит конечное число членов.

Формула (20.6) дает хороший способ вычисления корней. При этом чем меньше $\left|\frac{x}{a}\right|$, тем меньше членов можно брать в (20.6) для достижения заданной точности.

Упражнения

1. Путем разложения в ряд найти $\sqrt{1,1}$ и $\sqrt{1,5}$ как $\sqrt{1+x}$ при $x=0,1$ и при $x=0,5$, удерживая в разложении два, три и четыре члена. Сравнить с табличными значениями.

2. Показать, что при $|x| < 1$ справедлива приближенная формула $\sqrt[n]{1+x} = 1+\frac{x}{n}$, которая тем точнее, чем меньше x.

3. Найти по формуле предыдущего упражнения $\sqrt[3]{1,2}$, $\sqrt[3]{1,1}$, $\sqrt[3]{1,05}$. Сравнить с табличными значениями.

4. Найти $\sqrt{6}$ с тремя верными знаками после запятой.

Указание. Воспользоваться тем, что $6=4+2$, $\sqrt{4}=2$, и применить формулу (20.6).

5. Почему нельзя разложить $y=\sqrt{x}$ по формуле Маклорена?

§ 21. Порядок возрастания и убывания функций

Разложение функций в ряд дает общий способ приведения различных функций к одинаковому виду и позволяет сравнивать между собой различные функции. Такой способ сравнения нужен, например, в тех случаях, когда рассматривается отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при таком значении аргумента x, при котором значения обеих функций близки к нулю.

На примере вычисления производных было показано, что отношение двух очень близких к нулю величин может быть вполне определенным числом. В некоторых случаях это отношение может быть равным нулю или бесконечности. Приведем несколько примеров. Для простоты записи возьмем примеры, в которых интересующее нас значение x равно нулю.

При малом x функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ также малы. Функции e^x и $\cos x$ близки к 1, а следовательно, e^x-1 и $1-\cos x$ малы. При этом значения функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, e^x-1, $1-\cos x$ тем ближе к нулю, чем меньше $|x|$.

Сравним эти функции с величиной x. Для этого напишем их разложения в ряд Маклорена:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= x-\frac{x^3}{6}+\ldots, \\ \operatorname{tg} x &= x+\frac{x^3}{3}+\ldots, \\ 1-\cos x &= \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\ldots, \\ e^x-1 &= x+\frac{x^2}{2}+\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (21.1)$$

Отсюда находим:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\ldots$$

Следовательно,

$$\frac{\sin x}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Аналогично из (21.1) находим:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1+\frac{x^2}{3}+\ldots\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1,$$

$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}+\ldots\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}+\ldots \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2}+\ldots \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Можно найти и более сложные соотношения. Например, из

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots,$$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$$

следует:

$$\operatorname{tg} x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5+\ldots$$

и

$$\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Можно построить шкалу порядка убывания различных функций при стремлении x к нулю; порядком убывания назовем степень x, которая убывает так же быстро, как рассматриваемая величина. Если функция $f(x)$ имеет k-й порядок убывания при малых x, это значит, что она убывает как x^k, т. е. отношение $\frac{f(x)}{x^k}$ имеет пределом при $x \longrightarrow 0$ конечное, не равное нулю, число.

Таким образом, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, e^x-1 убывают по первому порядку, $1-\cos x$ убывает по второму порядку, $\operatorname{tg} x-\sin x$ убывает по третьему порядку при малых x.

В некоторых конкретных случаях порядок убывания можно определить и без разложения в ряд. Например, начертив линии синуса и косинуса, убедимся из чертежа, что $\sin x \approx x$, $\operatorname{tg} x \approx x$ при малых x, т. е. $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ имеют первый порядок убывания. Справедлива формула $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, и так как $\sin\frac{x}{2}$ первого порядка, то отсюда видим, что $1-\cos x$ имеет второй порядок убывания. Функцию $\operatorname{tg} x-\sin x$ можно записать как $\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)$. Так как

для малых x $\cos x$ близок к 1, $\sin x$ первого порядка, $1-\cos x$ второго порядка, то ясно, что $\operatorname{tg} x - \sin x$ третьего порядка. Однако эти конкретные приемы требуют больше остроумия, и именно поэтому полезен простой безотказный общий метод.

Такое соотношение между остроумным решением отдельных задач и общими методами наблюдается везде: свойства касательных к параболе, площадь круга, объем пирамиды, объем шара известны были древним грекам, но только дифференциальное и интегральное исчисления дали общие, простые способы решения всех задач такого типа.

При помощи рядов можно находить не только отношения функции к степени x, но и отношение одной функции к другой.

Приводим примеры:

$$\frac{e^x-1}{\sin x}=\frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots}{x-\frac{x^3}{6}+\ldots}=\frac{1+\frac{x}{2}+\ldots}{1-\frac{x^2}{6}+\ldots}\xrightarrow[x\to 0]{}1,$$

$$\frac{e^x-1}{1-\cos x}=\frac{x+\frac{x^2}{2}+\ldots}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\ldots}=\frac{1+\frac{x}{2}+\ldots}{\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}+\ldots}\xrightarrow[x\to 0]{}\infty,$$

$$\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}=\frac{x+\frac{x^2}{2}+\ldots}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x\sqrt{x}+\ldots\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

Коэффициенты рядов Маклорена выражаются через производные. Поэтому можно сформулировать результаты, получаемые при помощи рядов, в виде правил, относящихся к производным. Если $f(0)=g(0)=0$, то из формул

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{1}{2}f''(0)\,x^2+\ldots$$

и

$$g(x)=g(0)+g'(0)\,x+\frac{1}{2}g''(0)\,x^2+\ldots$$

получаем:

$$f(x)=f'(0)\,x+\frac{1}{2}f''(0)\,x^2+\ldots$$

и

$$g(x)=g'(0)\,x+\frac{1}{2}g''(0)\,x^2+\ldots$$

Отсюда

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)\,x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\ldots}{g'(0)\,x+\frac{1}{2}g''(0)\,x^2\ldots}=\frac{f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)\,x+\ldots}{g'(0)+\frac{1}{2}g''(0)\,x+\ldots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{f'(0)}{g'(0)},$$

т. е.

$$\frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{f'(0)}{g'(0)}$$

при $f(0)=g(0)=0$.

Таким образом, вместо того чтобы рассматривать отношение двух функций, значения которых близки к нулю (так как обе функции обращаются в нуль при одинаковом значении аргумента, вблизи которого рассматривается отношение), можно рассматривать отношение их производных. Этот результат называется *правилом Лопиталя*.

После изучения рядов удобнее не запоминать некое особое правило, а при малых x пользоваться рядами, в которых функция разложена по степеням x. Всюду там, где стоит сумма различных степеней x, при переходе к малым x оставляем только член с наименьшей степенью.

Точно так же как рассматривается порядок убывания при малых x функций, равных нулю при $x=0$, можно рассматривать поведение функций при неограниченном возрастании x, т. е. при $x\to\infty$. Если мы имеем дело с многочленом, то очевидно, что при большом x важен только член с наиболее высокой степенью x; можно говорить о порядке возрастания как x, как x^2 и т. д.

Важнейший факт заключается в том, что функция e^x возрастает быстрее любой степени x^n при неограниченном возрастании x. Для доказательства используем выражение e^x в виде ряда, справедливое, как это выяснено в § 19, при любых x. Получим:

$$\frac{e^x}{x^n}=\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{x}{(n+1)!}+\frac{x^2}{(n+2)!}+\ldots \quad (21.2)$$

При заданном n и при достаточно большом x дробь $\frac{e^x}{x^n}$ станет сколь угодно большой за счет членов с положительными степенями x в формуле (21.2). Очевидно, то же самое относится к функции e^{kx} с положительным k: обозначая

$kx = y$, найдем, что

$$\frac{e^{kx}}{x^n} = k^n \frac{e^{kx}}{(kx)^n} = k^n \frac{e^y}{y^n} \underset{y \to \infty}{\longrightarrow} \infty. \qquad (21.3)$$

Остается заметить, что если $y \to \infty$, то и $x \to \infty$. Рассмотрение дробного n ничего не изменит в результате. Таким образом, показательная функция при стремлении аргумента к ∞ растет быстрее любой степенной функции.

Показательная функция с отрицательным показателем в пределе при стремлении x к ∞ убывает быстрее любой отрицательной степени. Это утверждение записывается так: при любом n

$$f = \frac{e^{-x}}{x^{-n}} = x^n e^{-x} \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

Пользоваться для доказательства разложением e^{-x} по степеням x при большом x нельзя, потому что это разложение знакопеременное. Поэтому рассмотрим обратную величину

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x^n e^{-x}} = \frac{e^x}{x^n}.$$

Согласно (21.3) при любом n величина $f^{-1} = e^x/x^n \to \infty$ при $x \to \infty$. Из того, что $f^{-1} \to \infty$, следует, что $f \to 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, в пределе, при больших абсолютных значениях аргумента, стоящего в показателе, показательная функция (экспонента) зависит от x сильнее, чем любая постоянная степень x; e^x возрастает быстрее x^n, e^{-x} убывает быстрее x^{-n}. Ниже в таблице это наглядно видно на примере x^5 и e^x:

x	1	3	5	10	20	50	100
x^5	1	32	3125	10^5	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^8$	10^{10}
e^x	2,72	20	150	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^{21}$	10^{43}
$\frac{x^5}{e^x} = \frac{e^{-x}}{x^{-5}}$	0,37	1,6	21	5	0,01	10^{-13}	10^{-33}

Упражнения

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\operatorname{tg} x}{x^3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x-\operatorname{tg} x}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ II

Таблица 1

Таблица производных

1. $y=c$	$\dfrac{dy}{dx}=0$.
2. $y=x$	$\dfrac{dy}{dx}=1$.
3. $y=x^a$	$\dfrac{dy}{dx}=ax^{a-1}=a\dfrac{y}{x}$.
4. $y=e^x$	$\dfrac{dy}{dx}=e^x$.
5. $y=a^x$	$\dfrac{dy}{dx}=2{,}3\lg a\cdot a^x$.
6. $y=\ln x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$.
7. $y=\log_a x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{0{,}434}{\lg a}\dfrac{1}{x}$.
8. $y=\sin x$	$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$.
9. $y=\cos x$	$\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$.
10. $y=\operatorname{tg} x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
11. $y=\operatorname{ctg} x$	$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
12. $y=\arcsin x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $y = \arccos x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

15. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Таблица II

Интегралы от некоторых функций

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^a \, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$.
4. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a} \ln (ax+b) + C$.
5. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
6. $\int e^{kx} \, dx = \dfrac{1}{k} e^{kx} + C$.
7. $\int x^n e^{kx} \, dx = \dfrac{1}{k} x^n e^{kx} - \dfrac{n}{k} \int x^{n-1} e^{kx} \, dx$.
8. $\int \dfrac{dx}{1+e^{kx}} = \dfrac{1}{k} \ln \dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}} + C$.
9. $\int e^{kx} \sin ax \, dx = \dfrac{e^{kx}}{k^2+a^2} (k \sin ax - a \cos ax) + C$.
10. $\int e^{kx} \cos ax \, dx = \dfrac{e^{kx}}{k^2+a^2} (k \cos ax + a \sin ax) + C$.
11. $\int \sin kx \, dx = -\dfrac{1}{k} \cos kx + C$.
12. $\int \cos kx \, dx = \dfrac{1}{k} \sin kx + C$.
13. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 kx} = -\dfrac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + C$.
14. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 kx} = \dfrac{1}{k} \operatorname{tg} kx + C$.
15. $\int \sin^2 kx \, dx = \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{4k} \sin 2kx + C$.

16. $\int \cos^2 kx\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\sin 2kx + C.$

17. $\int x^n \sin kx\,dx = -\frac{x^n}{k}\cos kx + \frac{n}{k}\int x^{n-1}\cos kx\,dx.$

18. $\int x^n \cos kx\,dx = \frac{x^n}{k}\sin kx - \frac{n}{k}\int x^{n-1}\sin kx\,dx.$

19. $\int \sin kx \sin lx\,dx = \frac{\sin(k-l)x}{2(k-l)} - \frac{\sin(k+l)x}{2(k+l)} + C,$ если $|k| \neq |l|$ (если $|k| = |l|$, см. № 15).

20. $\int \cos kx \cos lx\,dx = \frac{\sin(k-l)x}{2(k-l)} + \frac{\sin(k+l)x}{2(k+l)} + C,$ если $|k| \neq |l|$ (если $|k| = |l|$, см. № 16).

21. $\int \sin kx \cos lx\,dx = -\frac{\cos(k+l)x}{2(k+l)} - \frac{\cos(k-l)x}{2(k-l)} + C,$ если $|k| \neq |l|$.

22. $\int \operatorname{tg} kx\,dx = -\frac{1}{k}\ln\cos kx + C.$

23. $\int \operatorname{ctg} kx\,dx = \frac{1}{k}\ln\sin kx + C.$

24. $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3} + C.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C.$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

27. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}}{15a^2} + C.$

28. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$

29. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$

30. $\int x\sqrt{x^2+m}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+m)^3} + C.$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln(x+\sqrt{x^2+m}) + C.$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C.$

33. $\int \sqrt{x^2+m}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right)\right] + C.$$

34. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$

35. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C.$

36. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$

37. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C,$ если $4ac-b^2>0,$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C,$$

если $4ac-b^2<0.$

38. $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$

$$+ \frac{(2n-3)\,2a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}.$$

39. $\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

(см. № 37).

40. $\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c}\ln\frac{x^2}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

(см. № 37).

41. $\int \frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} -$

$$-\frac{(2n+m-3)\,a}{(m-1)\,c}\int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n} -$$

$$-\frac{(n+m-2)}{(m-1)\,c}\int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n} \quad (m>1).$$

42. $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax+b} + C.$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a}\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} + C.$

44. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$

45. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx.$

46. $\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C.$

47. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$

48. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C.$

49. $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C.$

Таблица III

Некоторые разложения в ряды

1. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 +$
$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \qquad (-1 < x < 1).$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ (x — любое).

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ (x — любое).

4. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$
$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$

5. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ (x — любое).

6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad (-1 < x \leqslant 1).$

7. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \qquad (-1 \leqslant x < 1).$

8. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots$
$(-1 < x < 1).$

9. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad (-1 < x < 1).$

Таблица IV

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0	1,000	1,000	2,2	9,025	0,1108
0,1	1,105	0,905	2,4	11,023	0,0907
0,2	1,221	0,819	2,6	13,464	0,0743
0,3	1,350	0,741	2,8	16,445	0,0608
0,4	1,492	0,670	3,0	20,086	0,0498
0,5	1,649	0,607	3,2	24,533	0,0408
0,6	1,822	0,549	3,4	29,964	0,0334
0,7	2,014	0,497	3,6	36,598	0,0273
0,8	2,226	0,449	3,8	44,701	0,0224
0,9	2,460	0,407	4,0	54,598	0,0183
1,0	2,718	0,368	4,5	90,017	0,0111
1,1	3,004	0,333	5,0	148,41	0,00674
1,2	3,320	0,301	5,5	244,69	0,00409
1,3	3,669	0,273	6,0	403,43	0,00248
1,4	4,055	0,247	6,5	665,14	0,00150
1,5	4,482	0,223	7,0	1 096,6	0,000912
1,6	4,953	0,202	7,5	1 808,0	0,000553
1,7	5,474	0,183	8,0	2 981,0	0,000335
1,8	6,050	0,165	8,5	4 914,8	0,000203
1,9	6,686	0,150	9,0	8 103,1	0,000123
2,0	7,389	0,135	9,5	13 360	0,000075
			10,0	22 026	0,000045

Таблица V

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
1,0	0	2,2	0,788	5,0	1,609
1,1	0,0953	2,4	0,875	5,5	1,705
1,2	0,182	2,6	0,956	6,0	1,792
1,3	0,262	2,8	1,030	6,5	1,872
1,4	0,336	3,0	1,099	7,0	1,946
1,5	0,405	3,2	1,163	7,5	2,015
1,6	0,470	3,4	1,224	8,0	2,079
1,7	0,531	3,6	1,281	8,5	2,140
1,8	0,588	3,8	1,335	9,0	2,197
1,9	0,642	4,0	1,386	9,5	2,251
2,0	0,693	4,5	1,504	10,0	2,303

Таблица VI

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0	0,000	1,000	0,000	3,2	—0,0584	—0,998	0,0585
0,1	0,0998	0,995	0,100	3,3	—0,158	—0,987	0,160
0,2	0,199	0,980	0,203	3,4	—0,256	—0,967	0,264
0,3	0,296	0,955	0,309	3,5	—0,351	—0,936	0,375
0,4	0,389	0,921	0,423	3,6	—0,443	—0,897	0,493
0,5	0,479	0,878	0,546	3,7	—0,530	—0,848	0,625
0,6	0,565	0,825	0,684	3,8	—0,612	—0,791	0,774
0,7	0,644	0,765	0,842	3,9	—0,688	—0,726	0,947
0,8	0,717	0,697	1,030	4,0	—0,757	—0,654	1,158
0,9	0,783	0,622	1,260	4,1	—0,818	—0,575	1,424
1,0	0,841	0,540	1,557	4,2	—0,872	—0,490	1,778
1,1	0,891	0,454	1,965	4,3	—0,916	—0,401	2,286
1,2	0,932	0,362	2,572	4,4	—0,952	—0,307	3,096
1,3	0,964	0,268	3,602	4,5	—0,978	—0,211	4,637
1,4	0,985	0,170	5,798	4,6	—0,994	—0,112	8,860
1,5	0,997	0,0707	14,101	4,7	—1,000	—0,0124	80,713
1,6	0,9996	—0,0292	—34,233	4,8	—0,996	0,0875	—11,385
1,7	0,992	—0,129	— 7,697	4,9	—0,982	0,187	— 5,267
1,8	0,974	—0,227	— 4,286	5,0	—0,959	0,284	— 3,381
1,9	0,946	—0,323	— 2,927	5,1	—0,926	0,378	— 2,449
2,0	0,909	—0,416	— 2,185	5,2	—0,883	0,469	— 1,886
2,1	0,863	—0,505	— 1,710	5,3	—0,832	0,554	— 1,501
2,2	0,808	—0,589	— 1,374	5,4	—0,773	0,635	— 1,218
2,3	0,746	—0,666	— 1,119	5,5	—0,706	0,709	— 0,996
2,4	0,675	—0,737	— 0,916	5,6	—0,631	0,776	— 0,814
2,5	0,598	—0,801	— 0,747	5,7	—0,551	0,835	— 0,660
2,6	0,516	—0,857	— 0,602	5,8	—0,465	0,886	— 0,525
2,7	0,427	—0,904	— 0,473	5,9	—0,374	0,927	— 0,403
2,8	0,335	—0,942	— 0,356	6,0	—0,279	0,960	— 0,291
2,9	0,239	—0,971	— 0,246	6,1	—0,182	0,983	— 0,185
3,0	0,141	—0,990	— 0,143	6,2	—0,0831	0,997	— 0,0834
3,1	0,0416	—0,999	— 0,0416	6,3	—0,0168	1,000	0,0168

ГЛАВА III

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ И ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Исследование максимумов и минимумов функций при помощи второй производной

Задача о нахождении того значения x, при котором данная функция $y=f(x)$ достигает максимума или минимума, не разрешима в общем виде средствами элементарной алгебры.

В главе I мы установили, что в точках, где функция достигает максимума или минимума, ее производная равна нулю. Там же было показано, как, пользуясь производной y', установить, что́ имеет функция в данной точке x_0 — максимум, минимум или перегиб. Для этого приходилось вычислять значения y' при значениях x, близких к x_0, справа и слева от x_0.

В данном параграфе мы дадим другой способ, при котором к исследованию привлекается вторая производная y'', но нужно знать ее значение *только при* $x=x_0$.

Покажем, что если в точке $x=x_0$

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)<0,$$

то в рассматриваемой точке функция $f(x)$ имеет максимум. Действительно, из условия $f'(x_0)=0$ следует, что касательная в точке $x=x_0$ горизонтальна. Из неравенства $f''(x_0)<0$ следует*), что точка $x=x_0$ является точкой выпуклости, т. е. график вблизи $x=x_0$ расположен под касательной, а эти два факта и означают, что функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет максимум.

*) См. также § 5 этой главы, стр. 201.

Точно такими же рассуждениями легко убедиться, что если в точке $x = x_1$

$$f'(x_1) = 0, \quad f''(x_1) > 0,$$

то в рассматриваемой точке функция $f(x)$ имеет минимум. Эти выводы получаются также при рассмотрении ряда Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \ldots \quad (1.1)$$

Пусть $f'(x_0) \neq 0$. Например, пусть $f'(x_0) > 0$. При x, близких к x_0, величинами $(x - x_0)^2$, $(x - x_0)^3$, ... можно пренебречь по сравнению с $(x - x_0)$. Получаем:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

или

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (1.2)$$

Из (1.2) видим, что при $x > x_0$ $f(x) - f(x_0) > 0$, т. е. $f(x) > f(x_0)$. Если же $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$. Поэтому при $x = x_0$ нет ни максимума, ни минимума. Аналогично ни максимума, ни минимума нет, если $f'(x_0) < 0$. Если же $f'(x_0) = 0$, то пренебречь членом с $(x - x_0)^2$ уже нельзя. Пренебрегая членами с $(x - x_0)^3$, $(x - x_0)^4$ и т. д. по сравнению с $(x - x_0)^2$, получаем из (3.1)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Отсюда видим, что при $f''(x_0) > 0$ $f(x) > f(x_0)$ независимо от того, будет $x < x_0$ или $x > x_0$. Значит, $f(x_0)$ меньше всех соседних значений $f(x)$ и поэтому $f(x_0)$ — минимальное значение функции. Если $f''(x_0) < 0$, то $f(x) < f(x_0)$ и $f(x_0)$ — максимальное значение функции.

Может случиться, однако, что и $f''(x_0) = 0$. Как в этом случае исследовать значения функции вблизи $x = x_0$? Нужно обратиться к следующим производным функции $f(x)$. Если $f'''(x_0) \neq 0$, то, пренебрегая величинами $(x - x_0)^4$ и т. д. по сравнению с $(x - x_0)^3$, получим из (1.1)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3.$$

Разность $f(x) - f(x_0)$ меняет знак в зависимости от того, будет $x > x_0$ или $x < x_0$. При $x = x_0$ не имеем ни максимума, ни минимума.

Если же и $f'''(x_0)=0$, а $f^{IV}(x_0)\neq 0$, то

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{24}f^{IV}(x_0)(x-x_0)^4.$$

Знак выражения $f(x)-f(x_0)$ одинаков при $x<x_0$ и при $x>x_0$, он определяется знаком $f^{IV}(x_0)$. Если $f^{IV}(x_0)>0$, то имеем минимум, если $f^{IV}(x_0)<0$, то максимум.

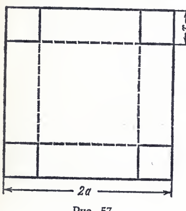


Рис. 57.

Внимательный читатель, вероятно, уже догадался, что если при $x=x_0$ первая не равная нулю производная нечетного порядка (первая, третья, пятая и т. д.), то ни максимума, ни минимума нет. Если же первая не равная нулю производная четного порядка (вторая, четвертая и т. д.), то имеем либо максимум, либо минимум, в зависимости от знака этой производной.

Рассмотрим примеры.

1) Из квадратного жестяного листа, сторона которого равна $2a$, требуется сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовать бока ящика (рис. 57). Какова должна быть длина стороны у вырезаемых квадратов?

Пусть стороны вырезаемых квадратов равны x. Объем ящика зависит от того, какой квадрат мы вырезаем, поэтому его естественно обозначить $V(x)$. Подсчитаем этот объем

$$V(x)=(2a-2x)^2x=4(a-x)^2x.$$

Найдем теперь производную этой функции

$$V'(x)=-8(a-x)x+4(a-x)^2.$$

Решим уравнение $V'(x)=0$:

$$-8(a-x)x+4(a-x)^2=0 \quad \text{или} \quad (a-x)(a-3x)=0,$$

откуда $x_1=a$, $x_2=\frac{a}{3}$.

Заметим сразу же, что значение $x_1 = a$ нас не интересует, так как при таком способе разрезания листа никакого ящика не получится. Остается $x = \frac{a}{3}$. При этом

$$V\left(\frac{a}{3}\right) = 4 \cdot \frac{4a^2}{9} \cdot \frac{a}{3} = \frac{16a^3}{27}; \quad V'\left(\frac{a}{3}\right) = 0;$$

$$V''(x) = 8x - 8(a-x) - 8(a-x) = 24x - 16a;$$

$$V''\left(\frac{a}{3}\right) = -8a < 0.$$

Следовательно, функция $V(x)$ при $x = \frac{a}{3}$ имеем максимум.

Итак, наибольшее значение получается при $x = \frac{a}{3}$, т. е. надо вырезать квадратики, стороны которых составляют $\frac{1}{6}$ стороны исходного квадрата.

Подсчитаем $V(x)$ при нескольких x, близких к $\frac{a}{3}$. Результаты подсчетов сведены в таблицу:

x	$V(x)$	x	$V(x)$
$0,25a$	$0,562a^3$	$0,40a$	$0,576a^3$
$0,30a$	$0,588a^3$	$0,45a$	$0,540a^3$
$0,33a$	$0,592a^3$		

Из таблицы видно, что малые изменения x вблизи $x = \frac{a}{3}$, т. е. около значения x, которому соответствует максимум функции, вызывают весьма малые изменения V. Функция вблизи максимума изменяется очень медленно.

Это же видно из формулы Тейлора (1.1). Так как в точке максимума $f'(x_0) = 0$, то (1.1) принимает вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3 + \ldots$$

Ряд не содержит $(x - x_0)$. Наименьшая степень $(x - x_0)^2$, а она весьма мала при x, близком к x_0. В нашем примере

изменение x на 9% (от $0{,}33a$ до $0{,}30a$) вызывает изменение V меньше чем на 1%, а изменение x на 24% вызывает изменение V на 5%.

Поэтому если нас интересует максимальное значение функции, а при нахождении x_0 из уравнения $f'(x)=0$ мы допустили небольшую ошибку, например, решили это уравнение приближенно, то это очень мало повлияет на величину максимального значения функции. Значение функции при x, близких к x_0, будут очень близкими к ее значению при $x=x_0$.

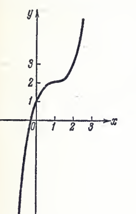


Рис. 58.

2) $y=A+B(x-a)^3$. Найти максимумы и минимумы функции.

$$y'=3B(x-a)^2, \quad y'(a)=0,$$
$$y''=6B(x-a), \quad y''(a)=0,$$
$$y'''=6B\neq 0.$$

Первой не равной нулю оказалась производная третьего порядка. В точке $x=a$ нет ни максимума, ни минимума, а есть перегиб. Это наглядно видно на графике, изображенном на рис. 58. (Он построен для случая $A=2$, $B=1$, $a=1$).

3) $y=A+B(x-a)^4$. Исследовать функцию на максимум и минимум.

$$y'=4B(x-a)^3, \quad y'(a)=0,$$
$$y''=12B(x-a)^2, \quad y''(a)=0,$$
$$y'''=24B(x-a), \quad y'''(a)=0,$$
$$y^{\text{IV}}=24B\neq 0.$$

Первой не равной нулю оказалась производная четвертого порядка. Если $B>0$, то она положительна, имеем минимум; если $B<0$, имеем максимум.

Этот вывод легко было сделать и непосредственно. Действительно, при $B<0$ $B(x-a)^4$ отрицательно при всех $x\neq a$, при $x=a$ — это нуль. Поэтому из A всегда вычитается какая-то положительная величина, а при $x=a$ ничего не вычитается. Значит, при $x=a$ максимум.

Аналогично, если $B > 0$, то при $x = a$ минимум.

4) Из имеющихся досок можно сделать забор длиной l *м*. Как этим забором огородить прямоугольный двор наибольшей площади, используя в качестве одной стороны стенку прилежащего здания (рис. 59)?

Рис. 59.

Пусть две стороны имеют длину по x *м*. Тогда третья сторона имеет длину $l - 2x$. Площадь двора $S(x) = (l - 2x)x = -2x^2 + lx$, $S'(x) = -4x + l$. Решая уравнение $S'(x) = 0$, получаем $x = \frac{l}{4}$, $S''(x) = -4 < 0$. При $x = \frac{l}{4}$ $S(x)$ имеет максимум.

Запишем $S(x)$ по формуле (1.1), полагая $x_0 = \frac{l}{4}$,

$$S(x) = \frac{l^2}{8} - 2\left(x - \frac{l}{4}\right)^2. \qquad (1.3)$$

Так как $S(x)$ есть многочлен второй степени, то (1.3) — точное равенство (см. § 17 главы II). Из него сразу видно, что $S(x)$ имеет максимум при $x = \frac{l}{4}$.

Равенство (1.3) можно получить, и не прибегая к методам высшей математики. Действительно, пусть нужно отыскать максимум (или минимум) многочлена второй степени

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (1.4)$$

Преобразуем многочлен следующим образом:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = $$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак,

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (1.5)$$

Замечая, что $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ при всех x, причем равенство нулю имеет место лишь при $x = -\frac{b}{2a}$, получаем из (1.5), что y имеет максимум, если $a < 0$, и этот максимум

получается при $x=-\frac{b}{2a}$; y имеет минимум, если $a>0$, и этот минимум получается при $x=-\frac{b}{2a}$.

Значение $x=-\frac{b}{2a}$ мы получили, проделав специальные искусственные преобразования с многочленом (1.4). Пользуясь производной, находим $x=-\frac{b}{2a}$ автоматически. Действительно, приравняв нулю производную от (1.4), получаем $2ax+b=0$, откуда $x=-\frac{b}{2a}$. Вторая производная от (1.4): $y''=2a$. Поэтому вопрос о том, имеется максимум или минимум, решается в зависимости от знака числа a.

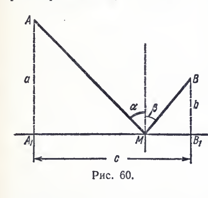


Рис. 60.

5) Пешеходу из пункта A требуется подойти к реке (прямая A_1B_1), а затем прийти в пункт B. Как проделать этот путь, пройдя наименьшее расстояние (рис. 60)?

Итак, $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$; числа a, b, c даны. Пусть путь пешехода изображается ломаной AMB. Нужно узнать, при каком положении точки M на прямой A_1B_1 этот путь будет наименьшим. Для того чтобы определить положение точки M, достаточно задать расстояние M от точки A_1, лежащей в основании перпендикуляра, опущенного из A на прямую, изображающую реку. Обозначим это расстояние A_1M через x. Тогда

$$AM=\sqrt{a^2+x^2}. \quad MB=\sqrt{b^2+(c-x)^2}.$$

Путь, пройденный пешеходом, обозначим $s(x)$,

$$s(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}. \qquad (1.6)$$

Находим:

$$s'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Приравнивая $s'(x)$ нулю, получим:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}. \qquad (1.7)$$

Это уравнение нетрудно решить. Возведя обе части в квадрат, получим:

$$\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{(c-x)^2}{b^2+(c-x)^2}$$

или

$$x^2b^2+x^2(c-x)^2=a^2(c-x)^2+x^2(c-x)^2,$$

$$x^2b^2=a^2(c-x)^2; \quad \frac{x^2}{(c-x)^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Извлекая из обеих частей корень, находим:

$$\frac{x}{c-x}=\pm\frac{a}{b},$$

откуда

$$x_1=\frac{ac}{a+b}, \quad x_2=\frac{ac}{a-b}.$$

Подставляя значения x_1 и x_2 в исходное уравнение (1.7), видим, что второй корень не удовлетворяет уравнению. Это посторонний корень, получившийся из-за возведения в квадрат. Итак, $x=\frac{ac}{a+b}$.

Однако можно, не решая уравнения, дать наглядную геометрическую картину, позволяющую получить ответ. Условие (1.7) перепишем так:

$$\frac{A_1M}{AM}=\frac{MB_1}{MB}. \qquad (1.8)$$

Но $\frac{A_1M}{AM}=\cos A_1MA=\sin\alpha$. Аналогично $\frac{MB_1}{MB}=\cos B_1MB=$ $=\sin\beta$. Условие (1.8) дает:

$$\sin\alpha=\sin\beta. \qquad (1.9)$$

Но α и β — углы острые. Поэтому из (3.9) получаем:

$$\alpha=\beta.$$

Таким образом, пешеход должен двигаться так, как движется луч света: угол падения равен углу отражения.

Для полного решения задачи остается показать, что при таком положении точки M путь действительно будет минимальным (а не максимальным). Это можно сделать, вычислив вторую производную от (1.6).

Можно, однако, использовать другие соображения. Из выражения (1.6) для $s(x)$ видим, что при любом x величина $s(x)$ положительна. При этом $s(x)$ неограниченно возрастает вместе с ростом абсолютной величины x, независимо от того, будет $x > 0$ или $x < 0$. А так как $s'(x)$ обращается в нуль лишь при одном значении x, то ясно, что при этом значении x функция $s(x)$ имеет минимум. Если в интересующем нас промежутке первая производная имеет лишь один корень, то наглядные соображения часто позволяют избежать формального исследования при помощи второй производной.

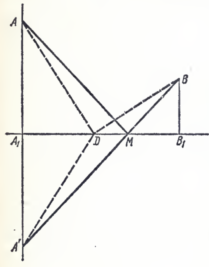


Рис. 61.

Задачу 5) можно решить чисто геометрически, не прибегая к методам высшей математики. На продолжении отрезка AA_1 (рис. 61) отложим $A_1A' = AA_1$ и точку A' соединим с B. Тогда $AM = A'M$, так как $\triangle AA_1M = \triangle A_1A'M$. Поэтому $AM + MB = A'M + MB = A'B$. Для любой другой точки D на отрезке A_1B_1 будет $AD + DB = A'D + DB$ и $A'D + DB > A'B$, так как ломаная длиннее отрезка прямой. Искомая точка M есть, следовательно, точка пересечения прямых $A'B$ и A_1B_1. Отсюда следует $\alpha = \beta$.

Два последних примера показывают, что некоторые задачи на нахождение максимума и минимума можно решить средствами элементарной математики. Однако, во-первых, далеко не все задачи можно осилить, не прибегая к высшей математике, во-вторых, решение элементарными средствами

требует смекалки и остроумия; высшая математика дает стандартный способ решения таких задач.

Это не значит, что в высшей математике не нужны смекалка и остроумие! Но теперь они пригодятся для более трудных вопросов.

Упражнения

1. Из прямоугольного жестяного листа со сторонами a и b делают ящик, вырезая равные квадраты по углам. Какова должна быть сторона у вырезанных квадратов, чтобы ящик имел максимальный объём?

2. В остроугольный треугольник с основанием a и высотой H вписать прямоугольник, две вершины которого лежат на основании треугольника, имеющий наибольшую площадь из всех прямоугольников такого вида.

3. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R.

4. При каком радиусе основания и при какой высоте закрытая цилиндрическая банка данного объема V будет иметь наименьшую полную поверхность?

5. Два тела двигаются по сторонам прямого угла с постоянными скоростями v_1 и v_2 (*м/сек*) по направлению к вершине, от которой в начале движения первое находилось на расстоянии a *м*, второе — на расстоянии b *м*. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

6. Доказать, что произведение двух положительных чисел, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей.

7. Прямой l плоскость разделена на две части (среды I и II). Тело движется в среде I со скоростью v_1, а в среде II со скоростью v_2. По какому пути должна двигаться точка, чтобы возможно скорее попасть из данной точки A среды I в данную точку B среды II?

§ 2. Другие виды максимумов и минимумов. Изломы и разрывы

До сих пор мы говорили, что максимумы и минимумы функции бывают при таких значениях x, при которых первая производная обращается в нуль. Однако максимумы (и минимумы) могут быть и при таких значениях аргумента, которые не обращают в нуль первую производную.

Рассмотрим следующую задачу. Определить, при каком значении сопротивления R, включенного последовательно с интересующим нас сопротивлением r, на r выделяется

максимальная мощность (рис. 62). При этом сопротивление r и напряжение батареи φ_0 считаем постоянными. Ток j в цепи получаем, пользуясь законом Ома

$$j = \frac{\varphi_0}{R+r}.$$

Мощность $W(R) = j\varphi_r$, где φ_r — падение напряжения на сопротивлении r. По закону Ома $\varphi_r = jr$, следовательно,

$$W(R) = \frac{\varphi_0^2 r}{(R+r)^2}.$$

Для определения максимума $W(R)$ решим уравнение $\frac{dW}{dR} = 0$; это дает:

$$-2\varphi_0^2 \frac{r}{(R+r)^3} = 0.$$

Полученное уравнение не имеет решения. Значит ли это, что мощность может расти неограниченно, что задача о максимальной мощности не имеет решения? Ведь из физического смысла задачи ясно, что мощность будет наибольшей при $R = 0$ $\left(\text{в этом случае } W = \frac{\varphi_0^2}{r}\right)$. Почему же мы не получили значения $R = 0$ из уравнения $\frac{dW}{dR} = 0$?

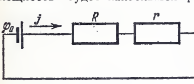


Рис. 62.

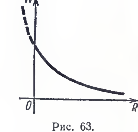


Рис. 63.

Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим график зависимости $W(R)$ (рис. 63).

Из графика видно, что если бы R могло принимать отрицательные значения, то при $R = 0$ максимума не было бы. Однако отрицательные R не имеют смысла. Во всякой физической задаче подразумевается, что $R \geqslant 0$. Таким образом, величина W имеет максимум при $R = 0$, потому что ограни-

чен промежуток изменения аргумента. Значит, если промежуток изменения аргумента ограничен, то при исследовании на максимум и минимум надо принимать во внимание граничные значения аргумента.

В случае, когда максимум (минимум) достигается на краю промежутка изменения аргумента, ряд

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots$$

может начинаться не с $(x-x_0)^2$, а с $(x-x_0)$. Поэтому если максимум функции получается при $x=x_0$, а мы несколько отступили от x_0, то при определении величины максимума мы можем совершить значительную ошибку. Эта ошибка пропорциональна $(x-x_0)$, а не $(x-x_0)^2$, как было в § 1. Значит, даже незначительный отход от значения аргумента, доставляющего максимальное значение, в этом случае нежелателен.

В рассмотренном случае подразумевается, что функция $f(x)$ определена формулой и при $x<x_0$, но значения функции при $x<x_0$ в данной конкретной задаче нас не интересуют (не имеют *физического* смысла).

Может случиться, что $f(x)$ просто не имеет смысла при некоторых значениях аргумента. Так, например, если функция содержит корень четной степени, например квадратный, то промежуток изменения аргумента, как правило, бывает ограничен (подкоренное выражение не может быть отрицательным). Следовательно, граничными являются значения аргумента, обращающие подкоренное выражение в нуль. При исследовании на максимум они должны быть рассмотрены специально.

Рассмотрим пример. Пусть

$$y=a-\sqrt{b-x}, \quad y'=\frac{1}{2\sqrt{b-x}}. \tag{2.1}$$

Хотя y' и не обращается в нуль, исследование не закончено. Значение $x=b$ обращает в нуль подкоренное выражение. Из (2.1) видим, что $y=a$ при $x=b$; если же $x<b$, то $y<a$, так как из a вычитается положительное число*). Поэтому y имеет максимум при $x=b$.

*) Мы считаем, что $\sqrt{b-x}$ понимается как положительное (арифметическое) значение корня.

Максимум (или минимум) может быть и во внутренних точках, где производная не обращается в нуль, если кривая имеет излом, угловую точку. Такие точки встречаются, в частности, когда кривая состоит из двух частей, описываемых различными формулами при $x < x_0$ и при $x > x_0$. Приведем пример физической задачи такого рода. Пусть на электроплитке постоянной мощности нагревается чайник. Определить момент времени, когда чайник обладает наибольшим количеством теплоты. Для простоты будем считать, что коэффициент полезного действия плитки 100%, т. е. она все тепло отдает чайнику. Пусть мы поставили чайник на плитку в момент времени $t=0$. В этот момент чайник обладал q калориями теплоты*). Количество теплоты, выделенное плиткой, дается формулой

$$Q = 0{,}24I^2Rt,$$

где I — сила тока в амперах, R — сопротивление в омах, t — время в секундах; при этом Q получается в калориях.

Таким образом, в момент t количество теплоты в чайнике

$$Q = q + 0{,}24I^2Rt.$$

В некоторый момент $t=t_0$ чайник закипает. В этот момент в нем накопилось $q+0{,}24I^2Rt_0$ теплоты.

Когда чайник закипел, вода начинает превращаться в пар**) (выкипать). При этом на образование одного грамма пара уходит 539 *кал*. Поэтому, обозначая через dm количество воды, выкипевшее за время dt, получим:

$$dm = \frac{0{,}24I^2R\,dt}{539}.$$

Следовательно, за 1 *сек* выкипает $\frac{dm}{dt} = \frac{0{,}24I^2R}{539}$ *г* воды.

Количество воды, выкипевшее в 1 *сек*, уносит из чайника

$$\frac{dQ_1}{dt} = 100\cdot\frac{dm}{dt} = \frac{24}{539}I^2R = 0{,}041I^2R \text{ кал}.$$

Поэтому к моменту времени $t\ (t > t_0)$ выкипевшая вода унесет из чайника $Q_1 = 0{,}041I^2R(t-t_0)$ *кал*.

*) За нуль принимается тепловая энергия воды при 0° С.

**) Парообразование происходит и при температуре меньше 100° С, но мы им пренебрегаем.

Следовательно, количество теплоты в чайнике выражается так:

$$Q = q + 0{,}24I^2Rt,$$

если $t \leqslant t_0$ (до начала кипения);

$$Q = q + 0{,}24I^2Rt_0 - 0{,}041I^2R(t - t_0) = q + I^2R(0{,}281t_0 - 0{,}041t),$$

если $t \geqslant t_0$ (после того, как чайник закипел). График $Q(t)$ изображен на рис. 64. Из рисунка ясно, что $Q(t)$ имеет

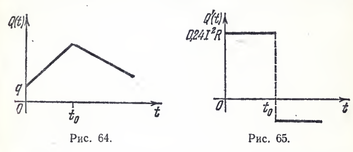


Рис. 64. Рис. 65.

максимум при $t = t_0$, хотя производная при этом значении t не обращается в нуль.

Производная при $t = t_0$ терпит разрыв. Действительно $Q'(t) = 0{,}24I^2R$, если $t < t_0$; $Q'(t) = -0{,}041I^2R$, если $t > t_0$. График производной приведен на рис. 65.

Последний пример показывает, что максимум может быть в случае, если производная разрывна, т. е. на графике кривая образует угол. Соответствующая точка кривой называется угловой точкой.

Наконец, из рис. 66 *) видно, что минимум (или максимум) может быть при тех значениях аргумента x_0, где производная терпит бесконечный разрыв. Соответствующая точка кривой называется острием. График производной для этого случая изображен на рис. 66. Здесь, как и в случае обычного минимума, при $x < x_0$ $y' < 0$; при приближении к $x = x_0$ слева функция убывает. При $x > x_0$ $y' > 0$; при

*) На графике изображена функция $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$.

увеличении x, после того как значение $x = x_0$ пройдено, функция возрастает. Однако при $x = x_0$ производная теряет смысл. Она делается как угодно большой при x, близком

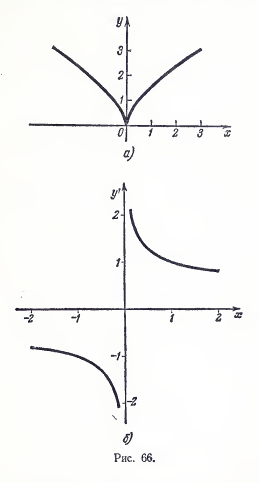


Рис. 66.

к x_0, и $x > x_0$; она становится сколь угодно большой по абсолютной величине, но отрицательной при x, близком к x_0, и $x < x_0$. Максимумы и минимумы, достигаемые при

тех значениях аргумента, когда производная терпит разрыв, иазываются острыми.

В связи с рассмотрением особенных точек на кривых и в первую очередь точек излома (см. рис. 64) можно уточнить рассуждения, которые привели нас к понятию производной. В главе I книги мы, не оговаривая этого специально, рассматривали гладкие кривые.

Производная $y'(t)$, взятая в точке t, равна пределу отиошения

$$\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1} \tag{2.2}$$

при стремлении t_2 и t_1 к t (при этом разность t_2-t_1, очевидно, стремится к нулю). Специально подчеркивалось, что этот предел не зависит от того, как выбраны t_2 и t_1; они могут быть оба больше t или оба меньше t, или один из них больше, а другой меньше t или один из них равен t, а другой больше или меньше t. В самом деле, когда мы берем

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \text{ и } \Delta t > 0,$$

то это выражение соответствует случаю, когда в (2.2) $t_1=t$, $t_2=t+\Delta t>t$. Когда мы берем

$$\frac{y(t)-y(t-\Delta t)}{\Delta t}, \quad \Delta t > 0,$$

то это соответствует в формуле (2.2) $t_1=t-\Delta t<t$, $t_2=t$. Наконец, мы вычисляли также производную как предел отношения

$$\frac{y\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)-y\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t},$$

что соответствует $t_1=t-\frac{\Delta t}{2}<t$; $t_2=t+\frac{\Delta t}{2}>t$.

В случае гладкой кривой все три выражения дают один и тот же предел, равный производной в данной точке. В случае кривой с изломом положение меняется. В самом деле, если обозначить через t_0 значение t, при котором имеет место излом, то, взяв

$$\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t},$$

получим при Δt, положительном и стремящемся к нулю, определенную величину — в примере на стр. 185 эта величина равна $-0{,}041I^2R$; такую величину называют «производная справа». Взяв

$$\frac{y(t_0)-y(t_0-\Delta t)}{\Delta t},$$

получим при Δt, положительном и стремящемся к нулю, другой предел, равный в упомянутом примере $+0{,}24I^2R$. Эта величина называется «производная слева».

Взяв t_2 и t_1 с разных сторон t_0, можно получить в пределе $t_2 \to t_0$, $t_1 \to t_0$ разные значения отношения (2.2).

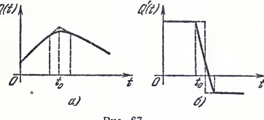


Рис. 67.

Таким образом, в самой точке излома производная не имеет определенного значения, но можно определить «производную слева» и «производную справа».

В главе I, впервые изучая производные, мы намеренно, для упрощения изложения, не отмечали каждый раз, что определенное значение производной, не зависящее от способа стремления Δt к нулю (слева или справа), существует лишь для точек в которых кривая — гладкая. Как видно из рис. 65, в точке, где кривая $y(t)$ имеет *излом*, кривая производной $y'(t)$ терпит *разрыв*. Если излом на кривой $y(t)$ заменить дугой малого радиуса, касающейся кривой слева и справа (как говорят чертежники, сделать сопряжение), то на том участке изменения t, где кривая $y(t)$ заменена дугой, кривая $y'(t)$ круто меняется (рис. 67).

Если кривая $y(t)$ имеет *разрыв* в точке t_0 (см. рис. 68), то можно сказать, что в точке t_0 производная $y'(t)$ бесконечна: в самом деле, если разрыв заменить изменением y от

y_1 до y_2 на малом отрезке от $t_0 - \varepsilon$ до $t_0 + \varepsilon$, то на этом отрезке производная равна $\frac{y_2 - y_1}{2\varepsilon}$, т. е. очень велика, тем больше, чем меньше ε (рис. 68).

Как обстоит дело с интегралом $\int_a^b y(t)\,dt$, если функция $y(x)$ не гладкая? Если функция имеет излом, то при вычислении площади, ограниченной кривой $y(t)$, никаких новых

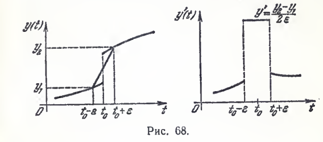


Рис. 68.

вопросов не возникает. В § 10 первой главы мы разбивали определенный интеграл — площадь — на сумму площадей прямоугольных полосок вида

$$y(t_n)(t_{n+1} - t_n) \quad \text{или} \quad y(t_{n+1})(t_{n+1} - t_n).$$

В пределе, при уменьшении величин интервалов, т. е. разностей $(t_{n+1} - t_n)$, становится безразлично, брать $y(t_n)$ или $y(t_{n+1})$, как в случае гладкой кривой $y(t)$, так и в случае кривой $y(t)$ с изломом.

Если кривая $y(t)$ терпит разрыв в точке $t = t_0$, но остается ограниченной, то для интервала, внутри которого находится разрыв $(t_n < t_0 < t_{n+1})$, величины $y(t_n)$ и $y(t_{n+1})$ остаются различными, как бы мы ни сближали t_n и t_{n+1}. Таким образом, в выражении интеграла как суммы величина одного из слагаемых в этом случае зависит от того, как берется сумма — по формуле (8.1) или (8.2) из главы I. Однако при стремлении к нулю величины интервала $t_{n+1} - t_n$ само слагаемое стремится к нулю, поэтому предел суммы, т. е. интеграл, имеет вполне определенное значение (не зависящее от способа вычисления суммы) и в том случае, когда подынтегральная функция имеет разрыв в области интегрирования.

Сохраняется и соотношение между интегралом и производной.

В частности, можно снова обратиться к рис. 64—65: назовем теперь функцию $Q'(t)$, график которой дан на рис. 65, $Q'(t)=f(t)$. Тогда функция $Q(t)$, график которой дан на рис. 64, представляет собой неопределенный интеграл: $Q(t)=\int f(t)\,dt$. На этом примере мы видим, что разрыв подинтегральной функции $f(t)$ приводит к излому в интеграле этой функции $Q(t)$.

Определенный интеграл функции с конечным разрывом может быть найден с помощью неопределенного интеграла по общему правилу

$$\int_a^b f(t)\,dt=Q(b)-Q(a).$$

Можно пойти и дальше: рассматривая рис. 68, можно сказать, что для функции, стремящейся к бесконечности, на интервале, стремящемся к нулю (рис. 68 справа), интеграл является разрывной функцией (рис. 68 слева). Однако при этом надо уточнять закон стремления к бесконечности функции и к нулю интервала, — здесь мы на этом не будем останавливаться. Такого рода примеры приводят к понятию δ-функции, см. Добавление в конце книги.

Упражнения

1. Найти наименьшее значение функции $y=x^2-2x+3$ при изменении x от 2 до 10.

Найти острый максимум функций:

2. $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$.
3. $y=1-\sqrt[3]{x^2}$.

§ 3. Вычисление площадей

В главе I было показано, что величина определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ дает площадь, ограниченную сверху линией $y=f(x)$, снизу осью x и по бокам вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 69). Поэтому умение находить определенные интегралы дает возможность вычислять стан-

дартными приемами различные площади, в то время как элементарная математика позволяет находить только площади прямолинейных фигур и круга.

Найдем площадь, ограниченную сверху кривой $y=cx^n$ $(n>0)$, снизу осью x и справа прямой $x=x_0$ (на рис. 70 $n=2$, $c=0{,}25$):

$$S=\int\limits_0^{x_0} cx^n\,dx=\left[\frac{cx^{n+1}}{n+1}\right]_0^{x_0}=\frac{cx_0^{n+1}}{n+1}. \qquad (3.1)$$

Формулу (3.1) перепишем так:

$$S=\frac{1}{n+1}\,cx_0^n x_0,$$

или так как $cx_0^n=y(x_0)$, то получаем:

$$S=\frac{1}{n+1}\,y(x_0)\,x_0. \qquad (3.2)$$

Величины y и x имеют размерность длины. Из (3.2) видим, что S действительно измеряется в единицах площади. Мы видим, что по порядку величины площадь есть $y(x_0)\cdot x_0$; от этого произведения величина площади отличается

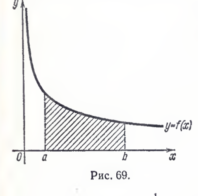


Рис. 69.

Рис. 70.

только множителем $\frac{1}{n+1}$, который по порядку близок к единице при не слишком больших n.

В качестве следующего примера найдем площадь, ограниченную сверху линией

$$y=ce^{-\frac{x}{a}}\ (a>0), \qquad (3.3)$$

снизу осью x, слева прямой $x=x_0$ и справа прямой $x=A\,(A>x_0)$ (рис. 71). Эта площадь равна

$$S_A=\int_{x_0}^{A} ce^{-\frac{x}{a}}\,dx=-cae^{-\frac{x}{a}}\Big|_{x_0}^{A}=ca\left[e^{-\frac{x_0}{a}}-e^{-\frac{A}{a}}\right]. \quad (3.4)$$

Если A велико по сравнению с x_0, то $e^{-\frac{x_0}{a}}\gg e^{-\frac{A}{a}}$. Увеличив значение A, мы, как видно из (3.4), почти не изменим значение S_A. При неограниченном увеличении A величина $e^{-\frac{A}{a}}$ неограниченно приближается к нулю. Поэтому можно говорить о площади фигуры рис. 71, не ограниченной справа. Эта площадь есть

$$S_\infty=\int_{x_0}^{\infty} ce^{-\frac{x}{a}}\,dx=cae^{-\frac{x_0}{a}}=y(x_0)\,a. \quad (3.5)$$

В формуле (3.3) показатель степени должен быть безразмерным числом. Поэтому размерность a такова же, как и размерность x, т. е. длина. Размерность y также длина. Размерность S опять-таки площадь.

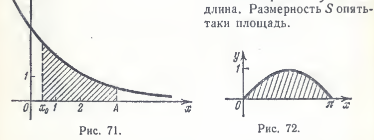


Рис. 71.

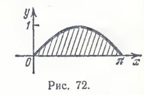


Рис. 72.

Оказывается, что очень просто выражается площадь под одной дугой синусоиды (рис. 72). Действительно, эта площадь есть

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

Определим площадь S эллипса. Заметим, что в силу симметрии достаточно найти площадь S_1 той его части, которая лежит в первом квадранте, и результат умножить на 4.

Итак, $S = 4S_1$. Для того чтобы подсчитать S_1, найдем y из уравнения эллипса. Уравнение эллипса с полуосями a и b и с центром в начале координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(см. так же § 7 главы IV). Так как в первом квадранте $y > 0$, то

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Поэтому

$$S_1 = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx. \tag{3.6}$$

Величину интеграла (3.6) легко найти, выполнив замену переменной по формуле $x = a \sin t$. Получим:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - \sin^2 t}\; a\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = a^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}. \tag{3.7}$$

Пользуясь (3.7), получаем из (3.6) $S_1 = \frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4}$. Площадь всего эллипса $S = \pi ab$. Если $a = b = r$, то получаем $S = \pi r^2$ (площадь круга) в полном соответствии с тем, что при $a = b = r$ эллипс переходит в окружность.

Отметим одно важное обстоятельство. Еще в главе I мы отметили, что площадь (интеграл) может быть как числом положительным, так и отрицательным. Ввиду этого при нахождении площади нужна некоторая осторожность. Пусть, например, нас интересует количество краски, необходимое для того, чтобы покрасить площадку, ограниченную двумя дугами синусоиды и осью x (см. рис. 28), если на окраску единицы площади требуется a граммов краски. Как показано на стр. 67, в этом случае нельзя сразу вычислять всю площадь одним интегралом. Приходится отдельно брать интегралы по отрезкам от 0 до π и от π до 2π.

Вообще, если подынтегральная функция $y=f(x)$ меняет знак, то для решения задачи о расходе краски нужно промежуток интегрирования разбить на части, в которых $f(x)$ знака не меняет, и считать интеграл по отдельным частям, после чего взять сумму абсолютных величин полученных интегралов.

Найдем еще площадь фигуры, ограниченной сверху линией $y=x^n e^{-x}$ (n — целое положительное число), снизу осью x при $x \geqslant 0$ (справа фигура не ограничена).

Эта площадь выражается интегралом

$$S=\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла применим интегрирование по частям, полагая

$$e^{-x}\,dx=dg, \qquad x^n=f.$$

Тогда

$$g=-e^{-x}, \qquad df=nx^{n-1}\,dx,$$

$$\int x^n e^{-x}\,dx=-x^n e^{-x}+\int nx^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=[-x^n e^{-x}]_0^\infty+\int_0^\infty nx^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

В § 21 главы II было установлено, что $x^n e^{-x}=\frac{x^n}{e^x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$. Так как $x^n e^{-x}=0$ при $x=0$, то $[-x^n e^{-x}]_0^\infty=0$, следовательно,

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=\int_0^\infty nx^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Обозначим $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=I_n$. Тогда $I_n=nI_{n-1}$.

Применив интегрирование по частям к I_{n-1}, получим точно так же $I_{n-1}=(n-1)I_{n-2}$ и т. д. Поэтому

$$I_n=n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2I_0.$$

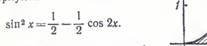
Но $I_0=\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$. Величину этого интеграла мы получим, положив в (3.5) $c=1$, $a=1$, $x_0=0$. Тогда $I_0=e^0=1$. Таким образом,

$$I_n=\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1=n! \tag{3.8}$$

Упражнения

1. Найти площадь, ограниченную одной дугой линии $y=\sin^2 x$ и осью x (график функции $y=\sin^2 x$ изображен на рис. 73).

Указание. Воспользоваться формулой



$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

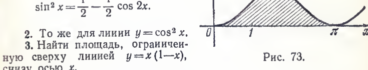


Рис. 73.

2. То же для линии $y=\cos^2 x$.

3. Найти площадь, ограниченную сверху линией $y=x(1-x)$, снизу осью x.

4. Найти площади, на которые парабола $y=\frac{1}{2}x^2$ делит окружность $x^2+y^2=8$.

5. Найти количество краски, необходимое для окраски площади, ограниченной кривой $y=\frac{x}{1+x^2}$, осью x и вертикальными прямыми $x=1$ и $x=-1$.

6. То же для площади, ограниченной кривой $y=x^3+2x^2-x-2$ и осью x.

Указание. Предварительно построить график функции

$$y=x^3+2x^2-x-2.$$

7. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

§ 4. Средние значения

Напомним читателю, что средним значением функции $f(x)$ на промежутке от $x=a$ до $x=b$ называется

$$\overline{f}(a;\, b)=\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}. \qquad (4.1)$$

Отметим два простых факта, относящихся к средним значениям.

1. Среднее значение постоянной величины на любом промежутке есть сама эта постоянная. Это ясно физически: действительно, если мгновенная скорость не изменяется, то средняя скорость за промежуток равна этому постоянному значению мгновенной скорости.

Совсем просто получить это и из формулы (4.1)

$$\overline{C}(a;\ b)=\frac{\int\limits_a^b C\,dx}{b-a}=\frac{C\,(b-a)}{b-a}=C.$$

2. Среднее значение суммы двух функций равно сумме средних значений слагаемых

$$\overline{y_1+y_2}=\overline{y_1}+\overline{y_2}.$$

Действительно,

$$\overline{y_1+y_2}=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b [y_1(x)+y_2(x)]\,dx=$$

$$=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b y_1(x)\,dx+\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b y_2(x)\,dx=\overline{y_1}+\overline{y_2}.$$

Найдем среднее значение функции $y=\sin x$ на промежутке от $x=0$ до $x=\pi$

$$\overline{y}(0;\ \pi)=\frac{\int\limits_0^\pi \sin x\,dx}{\pi-0}=\frac{2}{\pi}=0{,}637.$$

Среднее значение функции $y=\sin x$ на промежутке от $x=0$ до $x=b$

$$\overline{y}(0;\ b)=\frac{\int\limits_0^b \sin x\,dx}{b-0}=\frac{1-\cos b}{b}. \qquad (4.2)$$

Что будет, если неограниченно увеличивать число b, т. е. неограниченно увеличивать промежуток?

Числитель (4.2) при любом b не больше двух (он равен двум, если $\cos b=-1$, т. е. при $b=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi,\ \ldots$). Знаменатель (4.2) будет неограниченно увеличиваться, поэтому вся дробь будет неограниченно приближаться к нулю. Поэтому чем больше промежуток, тем ближе к нулю среднее значение $\sin x$.

Покажем, что среднее значение функции $y=\cos x$ на бесконечном промежутке также равно нулю. Действительно,

$$\overline{y}(0;\ b)=\frac{\int\limits_0^b \cos x\,dx}{b-0}=\frac{\sin x\Big|_0^b}{b}=\frac{\sin b}{b}. \qquad (4.3)$$

Если теперь неограниченно увеличивать число b, то знаменатель (4.3) неограниченно увеличивается, а числитель остается не больше единицы. Следовательно, вся дробь стремится к нулю: $\overline{y}(0;\ \infty)=0$.

Буквально так же получим, что среднее значение функции $y=\cos kx$ на бесконечном промежутке тоже равно нулю.

Найдем среднее значение функции $y=\sin^2 x$ на бесконечном промежутке от $x=0$ до $x=\infty$.

По известной формуле тригонометрии

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Отсюда

$$\overline{\sin^2 x}=\overline{\frac{1}{2}}-\overline{\frac{1}{2}\cos 2x}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

Воспользовавшись формулой $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получаем среднее значение $\cos^2 x$ на том же промежутке

$$\overline{\cos^2 x}=\overline{1}-\overline{\sin^2 x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Упражнения

1. Найти среднее значение функции $y=x^n$ на промежутке от $x=0$ до $x=x_0$.

2. Найти среднее значение функции $y=Ce^{kx}$ на промежутке, в котором y меняется от $y=n$ до $y=m$, выразить это среднее значение через n и m, исключая C и k из ответа. Исследовать полученное выражение при m, близком к n: $m=n+\nu$, $\nu\ll n$.

3. Найти средние значения функций $y=\sin^2 x$ и $y=\cos^2 x$ на промежутке: а) от $x=0$ до $x=\pi$; б) от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{4}$.

4. Определить период функции $y=\sin(\omega t+\alpha)$, где ω, α — постоянные числа. Найти среднее значение функции y^2 за ее период.

§ 5. Длина дуги кривой и кривизна

Поставим задачу найти длину дуги s кривой $y=f(x)$ от точки $x=a$ до точки $x=b$ (рис. 74).

Длину малого отрезка линии AC заменяем длиной отрезка прямой, соединяющей точки A и C. Мы рассматриваем только кривые без разрывов и изломов. По теореме Пифагора получим:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = (\Delta x)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Рис. 74.

Отсюда

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}. \qquad (5.1)$$

Переходим в (5.1) к пределу, $\Delta x \to 0$; при этом $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ превращается в производную $y'=f'(x)$, где $y=f(x)$ — уравнение линии; получаем *):

$$ds = \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Вся искомая длина дуги есть

$$s=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \qquad (5.2)$$

Из-за наличия корня под знаком интеграла в (5.2) интеграл редко удается легко взять.

Приведем несколько примеров, когда выкладки нетрудно довести до конца.

1. Длина окружности. Будем искать длину окружности $x^2+y^2=R^2$. При этом найдем длину s четверти окружности, лежащей в первом квадранте, и результат умножим на 4. Из уравнения окружности

$$y=\sqrt{R^2-x^2}, \quad y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

*) Отличие длины дуги от длины отрезка прямой порядка $(\Delta x)^2$ и при переходе к пределу (к дифференциалам) им законно можно пренебречь.

По формуле (5.2)

$$s=\int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=\int_0^R \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}. \qquad (5.3)$$

Введем новую переменную t по формуле $x=R\sin t$; тогда $dx=R\cos t\,dt$ и из (5.3) получаем *):

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\,dt=\frac{\pi R}{2},$$

откуда получаем длину окружности $C=\frac{\pi R}{2}\cdot 4=2\pi R$.

2. Цепная линия. Это — кривая, уравнение которой

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{+\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad (5.4)$$

Рис. 75.

где a — постоянное число. Название «цепная линия» происходит от того, что такую форму принимает гибкая и нерастяжимая тяжелая нить (например, цепь), подвешенная за оба конца. График цепной линии приведен на рис. 75 (для $a=2$).

Найдем длину дуги цепной линии от точки $x=0$ до точки $x=x_0$.

Из (5.4) $y'=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}$; поэтому

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}}=\sqrt{\frac{\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}}=$$

$$=\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

$$s=\int_0^{x}\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\,dx=\frac{1}{2}a\left[e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{x_0}=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_0}{a}}-e^{-\frac{x_0}{a}}\right).$$

*) См. § 16 главы II.

С длиной дуги связано определение радиуса кривизны R кривой в некоторой точке. Величину $1/R$ называют просто кривизной (чем меньше радиус, тем круче заворачивается линия).

Возьмем малый участок кривой (рис. 76) длиной ds и найдем угол между касательными к кривой в концах этого участка. Этот угол можно рассматривать как приращение $d\alpha$

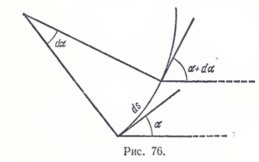


Рис. 76.

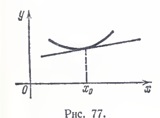
угла α наклона касательной к оси x. Проведем в двух соседних точках нормали (перпендикуляры к касательным). Угол между нормалями равен углу $d\alpha$ между касательными, согласно известной геометрической теореме. Отсюда можно найти расстояние R точки пересечения нормалей от кривой.

Будем рассматривать малый участок кривой как дугу окружности. Нормаль к окружности, очевидно, представляет собой радиус. Точка пересечения нормалей есть центр окружности. Если бы кривая была окружностью, то $ds = R\,d\alpha$ или $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$; эта величина постоянна для любого участка дуги окружности. Для произвольной кривой эта величина $\frac{d\alpha}{ds}$ для бесконечно малого участка кривой может служить определением кривизны в данной точке. Пользуясь формулой для ds и тем, что $\alpha = \operatorname{arctg} y'$, можно найти выражение для кривизны:

$$d\alpha = d\operatorname{arctg} y' = \frac{dy'}{1+y'^2}, \quad ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

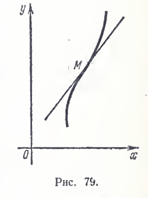
Знак кривизны $\frac{d\alpha}{ds}$ совпадает со знаком второй производной y'' и характеризует направление выпуклости кривой.



Рнс. 77.

Рнс. 78.

Если в точке x_0 величина $y'' > 0$ (рис. 77), то кривая вблизи этой точки проходит выше касательной в этой точке и направлена выпуклостью вниз. Если $y''(x_0) < 0$ (рис. 78), то кривая проходит ниже касательной и направлена выпуклостью вверх.



Рнс. 79.

Может случиться, что $y''(x_0) = 0$, причем справа от x_0 (т. е. при $x > x_0$) $y''(x) > 0$, а при $x < x_0$ будет $y''(x) < 0$. Это значит, что справа от точки x_0 кривая направлена выпуклостью вверх, а слева — выпуклостью вниз (рис. 79). В такой точке (точка M на рис. 79) кривая переходит с одной стороны касательной на другую, в ней кривая меняет направление выпуклости, «перегибается». Поэтому такие точки называют точками перегиба.

Упражнения

1. Записать в виде интеграла длину дуги параболы $y = x^2$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

2. Записать в виде интеграла длину дуги линии $y = e^x$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$.

3. Записать в виде интеграла длину дуги эллипса.

4. Довести до конца задачу 2, выполнив в интеграле замену переменной $1 + e^{2x} = z^2$.

§ 6. Приближенное вычисление длины дуги

В § 5 мы получили формулу для вычисления длины дуги кривой

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx. \qquad (6.1)$$

Там же было отмечено, что чаще всего функцию $\sqrt{1+y'^2(x)}$ проинтегрировать в элементарных функциях трудно (или даже невозможно) из-за наличия корня. Поэтому большой интерес представляют приближенные формулы для вычисления длины дуги.

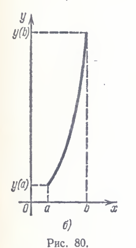


Рис. 80.

Предположим, что величина $y'^2(x)$ мала по сравнению с единицей: $|y'(x)|\ll 1$. Тогда, пренебрегая в (6.1) $y'^2(x)$, получим:

$$s\approx\int_a^b \sqrt{1}\,dx=b-a. \qquad (6.2)$$

Разность $b-a$ есть длина горизонтального отрезка, концы которого $x=a$ и $x=b$. Формула (6.2) показывает, что если y' мала по абсолютной величине (кривая мало отклоняется от горизонтального отрезка), то и длина дуги этой кривой близка к длине горизонтального отрезка (рис. 80, a).

Если $y'^2(x)\gg 1$, то в (6.1) пренебрегаем единицей по сравнению с $y'^2(x)$. Получаем:

$$s\approx\int_a^b \sqrt{y'^2(x)}\,dx=\int_a^b y'(x)\,dx=$$
$$=y(b)-y(a). \qquad (6.3)$$

Формула (6.3) показывает, что в этом случае длина дуги кривой близка к длине вертикального отрезка, концы которого есть $y(a)$ и $y(b)$ (рис. 80, $б$). Действительно, если производная y' велика, то кривая круто поднимается вверх, а

поэтому похожа на вертикальную прямую (для вертикальной прямой производная бесконечна).

Формулы (6.2) и (6.3) дают простые, приближенные формулы для длины дуги, но это очень грубые приближения, которые можно получить и без (6.1).

Получим более точные формулы.

Пусть $|y'(x)| < 1$. Удерживая два первых члена в формуле бинома Ньютона (глава II, § 20), получим:

$$\sqrt{1+y'^2(x)} = 1 + \frac{1}{2}y'^2(x).$$

Формула (6.1) дает:

$$s \approx \int_a^b \left[1 + \frac{1}{2}y'^2(x)\right] dx = (b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b y'^2(x)\,dx.$$

Если $|y'(x)| > 1$, то

$$\sqrt{1+y'^2(x)} = y'(x)\sqrt{1+\frac{1}{y'^2(x)}};$$

к последнему корню применим формулу бинома Ньютона, так как $\frac{1}{y'^2} < 1$,

$$y'(x)\sqrt{1+\frac{1}{y'^2(x)}} = y'(x), \quad \left[1+\frac{1}{2y'^2(x)}\right] = y'(x) + \frac{1}{2y'(x)}.$$

Подставляя последнее в (6.1), получаем:

$$s = \int_a^b \left[y'(x) + \frac{1}{2y'(x)}\right] dx = \int_a^b y'(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{y'(x)} =$$

$$= y(b) - y(a) + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{y'(x)}.$$

Итак, мы получили приближенные формулы:

$$\left.\begin{aligned} s &= (b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b y'^2(x)\,dx, \text{ если } |y'(x)| < 1, \\ s &= y(b) - y(a) + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{y'(x)}, \text{ если } |y'(x)| > 1. \end{aligned}\right\} \quad (6.4)$$

Входящие сюда интегралы проще, чем интеграл в (6.1), поэтому по этим формулам гораздо проще считать, чем по формуле (6.1). Однако эти формулы приближенные.

Какую же ошибку делаем мы, пользуясь ими? Первая из формул тем лучше, чем меньше $|y'|$, а вторая тем лучше, чем больше $|y'|$; обе формулы дают наиболее плохой результат при $|y'|=1$. Поэтому для оценки погрешности рассмотрим самый невыгодный случай $y'(x)=1$ *).

По точной формуле (6.1)

$$s=\int_a^b \sqrt{1+1}\,dx=\sqrt{2}\,(b-a). \tag{6.5}$$

По первой из формул (10.4)

$$s=(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b dx=\frac{3}{2}\,(b-a). \tag{6.6}$$

Вторая формула (6.4) дает то же самое: $s=\frac{3}{2}(b-a)$. Сравнивая (6.5) и (6.6), видим, что наибольшая погрешность приближенной формулы 6%.

При вычислении длины дуги кривую следует разбивать на участки, на которых либо $|y'|\leqslant 1$, либо $|y'|\geqslant 1$. Тогда ошибка будет во всяком случае не больше 6%. А так как $y'^2(x)$ принимает значение, равное 1, лишь в отдельных точках кривой, то при правильном разбиении линии на участки ошибка будет меньше 6%. Длины прямолинейных отрезков, конечно, находить по приближенной формуле незачем.

Рассмотрим примеры.

1. Найти длину дуги параболы $y=x^2$ между точками с абсциссами $x=0$ и $x=2$ **).

Найдем производную $y'=2x$. Она равна 1 при $x=0{,}5$ и больше 1 при $x>0{,}5$. Поэтому длину дуги (s_1), соответствующую изменению x от 0 до 0,5, найдем по первой формуле (10.4), а длину дуги (s_2), соответствующую изменению x от 0,5 до 2,— по второй формуле:

$$s_1=(0{,}5-0)+0{,}5\int_0^{0{,}5} 4x^2\,dx=0{,}5+2\cdot\frac{0{,}5^3}{3}=0{,}58,$$

$$s_2=4-0{,}25+0{,}5\int_{0{,}5}^{2}\frac{dx}{2x}=3{,}75+0{,}25\,(\ln 2-\ln 0{,}5)=4{,}10.$$

*) Если $y'(x)=1$, то $y(x)=x+c$, график этой функции — прямая линия.

**) В этих примерах вычисления проведены с двумя знаками после запятой.

Искомая длина дуги

$$s = s_1 + s_2 = 0{,}58 + 4{,}10 = 4{,}68.$$

Подсчитаем точное значение длины дуги по формуле (6.1):

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Сделав замену $2x = z$, по формуле 33 (стр. 168) получим:

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\right]. \qquad (6.7)$$

Недоверчивый читатель может убедиться в справедливости формулы, взяв производную правой части (10.7).

Пользуясь (10.7), получаем:

$$s = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)\right] = 4{,}65.$$

Ошибка при подсчете по формулам (6.4) составила около 0,7%.

2. Найти длину дуги кривой $y = e^x$ между точками с абсциссами $x = 0$ и $x = 1$.

В этом случае $y' = e^x$, и при изменении x от 0 до 1 производная растет от 1 до e. Поэтому используем вторую формулу (6.4)

$$s = e^1 - e^0 + 0{,}5\int_0^1 \frac{dx}{e^x} = 2{,}72 - 1 - 0{,}5e^{-x}\Big|_0^1 = 2{,}04.$$

Точная формула дает для длины дуги значение (см. задачи 2 и 4 из § 5)

$$s = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 2{,}00.$$

Ошибка приближенной формулы 2%.

Иногда для приближенного вычисления длины дуги подинтегральную функцию в (6.1) разлагают в ряд по степеням x. При этом, удерживая надлежащее число членов разложения, можно получить значение длины дуги с любой степенью точности.

Рассмотрим пример. Определим длину окружности. При этом будем искать длину s дуги окружности, соответствующую центральному углу в 30° (рис. 81). Длина окружности $C = 12s$. Ясно, что мы получим такой же интеграл, как и в (9.3), но с другим верхним

пределом

$$s=\int\limits_0^{OA}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Заметим, что $OA=R\sin 30^\circ=\frac{1}{2}R$. Поэтому

$$s=\int\limits_0^{\frac{1}{2}R}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}. \qquad (6.8)$$

Подынтегральное выражение преобразуется следующим образом:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{R}{R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}.$$

Рис. 81.

Но

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}=\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (6.9)$$

Выражение (10.9) разложим в ряд по формуле бинома Ньютона *). Для этого положим $\left(\frac{x}{R}\right)^2=t$. Получим:

$$\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=(1-t)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2+\frac{5}{16}t^2+$$
$$+\frac{35}{128}t^4+\ldots=1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{R}\right)^4+\frac{5}{16}\left(\frac{x}{R}\right)^6+$$
$$+\frac{35}{128}\left(\frac{x}{R}\right)^8+\ldots \qquad (6.10)$$

Подставляя (6.10) в (6.8) и интегрируя, получим:

$$s=\frac{1}{2}R+\frac{1}{6\cdot 8}R+\frac{3}{40\cdot 32}R+\frac{5}{16\cdot 7\cdot 2^7}R+\frac{35}{128\cdot 9\cdot 2^9}R+\ldots=$$
$$=R\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{48}+\frac{3}{40\cdot 32}+\frac{5}{16\cdot 7\cdot 2^7}+\frac{35}{128\cdot 9\cdot 2^9}+\ldots\right]. \qquad (6.11)$$

*) См. главу II, формулу (20.3).

Видно, что члены ряда (6.11) убывают довольно быстро. Поэтому для получения s достаточно взять несколько первых членов ряда. Взяв один член ряда, получим $s=\frac{1}{2}R$, откуда длина всей окружности $C=6R$. Взяв два члена, получим $s=0,521R$, $C=6,252R$. Три члена ряда дают $s=0,523R$, $C=6,276R$ и т. д.

Мы знаем, что длина окружности $C=2\pi R$. Сравнивая это с полученными нами результатами, находим приближенные значения числа π:

$$3,\ 3,126,\ 3,138,\ \ldots$$

Чем больше членов ряда (6.11) взять, тем точнее получим значение π. Значение числа π с семью верными десятичными знаками 3,1415926.

Упражнения

1. Найти, пользуясь приближенными формулами, длину дуги цепной линии между точками $x=0$ и $x=2$ $(a=1)$. Сравнить с точным значением длины дуги.

2. Найти длину дуги гиперболы $xy=-1$ между точками $x=0,5$ и $x=1$.

Замечание. В этом случае точного решения получить нельзя, так как интеграл в (6.1) не может быть выражен с помощью элементарных функций.

3. Получить приближенные значения числа π, исходя из подсчета длины дуги окружности с центральным углом в 45° (удержать три, четыре и пять членов ряда).

§ 7. Вычисление объемов. Объем и поверхность тела вращения

В главе 1 (§ 14) была получена формула

$$V=\int_{x_0}^{x_k} S(x)\,dx, \tag{7.1}$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси x и проходящей через точку x (советуем читателю повторить вывод этой формулы).

При помощи этой формулы было получено выражение для объема пирамиды. Буквально так же получается объем конуса. Возьмем начало координат в центре круга, лежащего

в основании конуса, а ось x направим по высоте конуса (рис. 82). Пусть $S(x)$ — площадь сечения конуса плоскостью, перпендикулярной к высоте и отстоящей от основания конуса на расстоянии x. Сечение это есть круг радиуса r_x. Из подобия треугольников

$$\frac{r_x}{r}=\frac{H-x}{H},$$

где r — радиус основания, H — высота конуса. Отсюда $r_x = \frac{r}{H}(H-x)$, а следовательно,

$$V=\int_0^H \pi\frac{r^2}{H^2}(H-x)^2\,dx=\frac{\pi r^2}{H^2}\int_0^H (H-x)^2\,dx=$$

$$=-\frac{\pi r^2}{H^2}\frac{(H-x)^3}{3}\Big|_0^H=\frac{\pi r^2H^3}{3H^2}=\frac{\pi r^2H}{3}.$$

Для получения объема шара поместим начало координат в центр большого круга, а ось x направим по диаметру шара, перпендикулярному к плоскости этого большого круга.

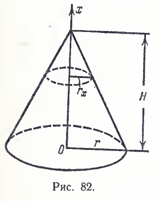


Рис. 82.

Сечение плоскостью, перпендикулярной к оси x и отстоящей на расстоянии x от начала координат, есть круг радиуса R_x. При этом $R_x=\sqrt{R^2-x^2}$ по теореме Пифагора. Поэтому

$$S(x)=\pi R_x^2=\pi\ (R^2-x^2),$$

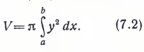
$$V=\int_0^R \pi(R^2-x^2)\,dx=$$

$$+\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Из формулы (7.1) следует принцип Кавальери*): пусть между двумя параллельными плоскостями P и Q расположены два тела; если в сечении этих тел всякой плоскостью, параллельной P и Q, получаются равновеликие фигуры (равны подынтегральные функции $S(x)$), то и объемы этих тел равны.

*) Кавальери — математик первой половины XVII века. Упомянутый принцип был сформулирован (по существу без доказательства) в его книге «Геометрия неделимых» (1635 г.).

Пусть тело получено вращением фигуры, изображенной на рис. 83, вокруг оси x (фигуру такого вида называют криволинейной трапецией). В этом случае сечение есть круг радиуса $y=f(x)$ и $S(x)=\pi y^2$. Пользуясь (7.1), находим:



$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx. \qquad (7.2)$$

Рис. 83.

Найдем, например, объем тела, получаемого при вращении верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси x. Тело это называется эллипсоидом вращения.

Из уравнения эллипса $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, а из (7.2)

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

При $a=b=R$ получаем объем шара радиуса R.

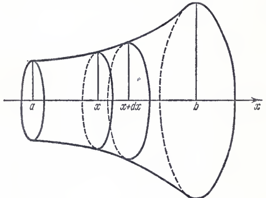


Рис. 84.

Выведем теперь формулу для поверхности тела вращения (рис. 84). Рассмотрим тело, ограниченное сечениями, проходящими через точки x и $x+dx$. Обозначим через dP

боковую поверхность этого тела. Считая его усеченным конусом, получим:

$$dF = \pi [y(x) + y(x+dx)] \, ds,$$

где ds — длина малого участка кривой, причем $ds = \sqrt{1+y'^2(x)}\, dx$ (см. § 5). Сумму $y(x)+y(x+dx)$ можно

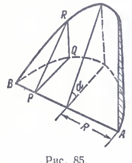


Рис. 85.

заменить на $2y(x)$, пренебрегая величиной $y'(x)\,dx$ по сравнению с $y(x)$ *).

Поэтому

$$dF = 2\pi y(x) \sqrt{1+y'^2(x)}\, dx.$$

Вся площадь поверхности вращения есть

$$F = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1+y'^2(x)}\, dx. \qquad (7.3)$$

При помощи этой формулы легко находим поверхность шара. Действительно, шар получается вращением верхней полуокружности вокруг оси x. Уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$, откуда

$$y = \sqrt{a^2-x^2}, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Подставляя в (7.3), получаем:

$$F = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = 2\pi a x \Big|_{-a}^{a} = 4\pi a^2.$$

*) Заметим, что в выражении dF сумма $y(x)+y(x+dx)$ множится на ds, так что величина, которой мы пренебрегаем, порядка $dx \cdot ds \approx dx^2$.

Упражнения

1. Найти объем цилиндрического отрезка, т. е. тела, отсекаемого от прямого кругового цилиндра радиуса R плоскостью, проведенной через диаметр основания цилиндра под углом α (рис. 85).

2. Найти объем конуса, пользуясь тем, что конус — это тело, получаемое при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

3. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной сверху линией $y=\sqrt{x}$, снизу осью x, справа вертикальной прямой $x=2$.

§ 8. Как надо строить кривые

Самый примитивный способ построить график функции $f(x)$ состоит в вычислении значений $f(x_n)$ для большого числа точек x_n; при этом обычно точки x_n выбирают в виде $x_n = x_0 + na$; $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ясно, что такой способ не экономичен. Для того чтобы проследить изменение функции на интервале Δx, нужно выбрать шаг a гораздо меньшим, чем Δx: $a \ll \Delta x$. Но при малом шаге потребуется очень большое число точек для того, чтобы охватить всю интересующую нас область.

Приемы, рассмотренные в §§ 1 и 2, позволяют гораздо быстрее и надежнее построить график, составить общее представление о виде кривой. Для этого следует прежде всего найти характерные точки графика — максимумы, минимумы, точки изломов, точки перегиба и т. д.

Проиллюстрируем это на примере графика многочлена третьей степени, т. е. графика функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{8.1}$$

Знание графика позволяет получить о функции ряд важных сведений, например, число вещественных корней, промежутки, в которых располагаются корни, и т. д.

Построим, например, график функции

$$y = 0{,}5x^3 - 0{,}75x^2 - 3x + 2{,}5. \tag{8.2}$$

Найдем, прежде всего, максимумы и минимумы. Приравнивая нулю производную от (8.2), получим:

$$y' = 1{,}5x^2 - 1{,}5x - 3 = 0, \tag{8.3}$$

откуда находим $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Исследуем каждое из этих значений в отдельности. Для этого найдем y'': $y''=3x-1{,}5$, $y''(-1)=-4{,}5<0$. Значит, при $x_1=-1$ функция имеет максимум

$$y_{\max}=-0{,}5-0{,}75+3+2{,}5=4{,}25;$$

$y''(2)=6-1{,}5=4{,}5>0$. Поэтому при $x_2=2$ функция имеет минимум

$$y_{\min}=-2{,}5.$$

Теперь посмотрим, как будет вести себя многочлен при очень больших по абсолютной величине значениях x. Заметим, что при очень больших x член, содержащий x^3, будет значительно превосходить по абсолютной величине остальные члены. Поэтому знак многочлена (8.1) определяется знаком выражения ax^3.

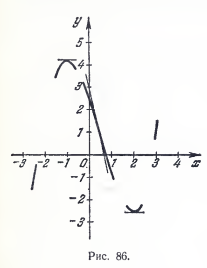


Рис. 86.

Если $a>0$, то $ax^3>0$ при $x>0$, правая ветвь графика уходит вверх; $ax^3<0$ при $x<0$, левая ветвь графика уходит вниз. Ясно, что при $a<0$ левая ветвь уходит вверх, а правая — вниз.

Найдем точки перегиба. Из сказанного в § 5 ясно, что для нахождения точек перегиба следует решить уравнение $f''(x)=0$. Пользуясь (8.3), находим $y''=3x-1{,}5$. Уравнение $y''=0$ дает $x=0{,}5$. Так как $y'''=3$, то $y-\tilde{y}=\frac{1}{2}(x-0{,}5)^3$, где через $\tilde{y}$ обозначена ордината касательной. Поэтому, если $x>0{,}5$, то $y-\tilde{y}>0$, если же $x<0{,}5$, то $y-\tilde{y}<0$. Следовательно, при $x=0{,}5$ имеем перегиб.

Отметим, что график многочлена третьей степени всегда имеет и притом единственную точку перегиба. Действительно, уравнение $y''=0$, когда y есть многочлен третьей степени,

есть уравнение первой степени. Оно всегда имеет единственный корень x_0. Так как $y''' = \text{const}$, то $y - \tilde{y} = A(x - x_0)^3$. Ясно, что $y - \tilde{y}$ меняет знак при переходе x через значение x_0.

Вернемся к построению графика. Вычислим ординату y точки перегиба; получим $y \approx 0{,}88$. Определим еще направление касательной к графику в точке перегиба. Пользуясь (8.3), получаем $\operatorname{tg} \alpha = y'(0{,}5) = 3{,}38$. Используя все приведенные выше соображения, получаем для (8.2) рис. 86.

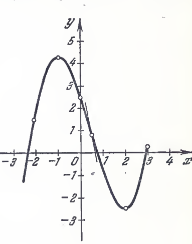


Рис. 87.

Конечно, если не вычислять больше никаких значений функции, то получим график, дающий грубую качественную картину поведения функции. Однако даже такой график дает возможность подсчитать число корней (т. е. число точек пересечения графика с осью x) и сделать кое-какие заключения об их величине. В нашем примере на рис. 86 видим, что корней три, что один из корней лежит где-то между 0,5 и +2, что второй корень обязательно положительный (он больше 2), а третий — отрицательный (он меньше −1).

График можно значительно уточнить, если подсчитать значения функции еще при нескольких значениях x.

В нашем примере подсчитаем еще три значения функции. При $x = 0$ $y = 2{,}5$; это позволит нам лучше представить ход кривой между максимумом и минимумом. При $x = 3$ $y = 0{,}25$. Это значение мы подсчитали, чтобы получить представление о скорости подъема правой ветви кривой. Аналогично, чтобы получить представление о скорости спада левой ветви кривой, возьмем $x = -2$. Получим $y = 1{,}5$. Используя эти значения, получаем график рис. 87.

По такому графику можем сделать более точные заключения о корнях: один корень лежит между $x=0,5$ и $x=1$; второй — между $x=2$ и $x=3$, ближе к $x=3$; третий корень меньше $x=-2$ (вероятно, его значение близко к $x=-2,5$).

Может случиться, что, приравняв производную нулю, мы не получим вещественных корней. Это означает, что исследуемый многочлен не имеет ни максимума, ни минимума. Так как все сказанное о поведении многочлена при очень больших по абсолютной величине значениях x остается в силе, то в этом случае график пересекает ось x только в одной точке (многочлен имеет один вещественный корень).

Наконец, производная может иметь лишь один (двойной) корень x_0. Тогда она имеет вид

$$y' = A(x-x_0)^2. \tag{8.4}$$

Интегрируя (4.4), получим:

$$y = \frac{A}{3}(x-x_0)^3 + C. \tag{8.5}$$

Мы видим из (8.5), что в этом случае многочлен лишь постоянным слагаемым отличается от полного куба. Из (8.5) заключаем, что ни максимума, ни минимума y не имеет (см. пример 2) § 1). График пересекает ось x в одной точке. Эту точку находим, приравнивая в (8.5) y нулю,

$$\frac{A}{3}(x-x_0)^3 + C = 0,$$

$$(x-x_0)^3 = -\frac{3C}{A},$$

$$x = x_0 - \sqrt[3]{\frac{3C}{A}}.$$

Нахождение максимума и минимума многочлена третьей степени, а значит, и исследование его графика всегда можно довести до конца, потому что, приравняв производную нулю, получим квадратное уравнение, корни которого найти нетрудно.

Упражнения

Найти максимумы и минимумы следующих функций и построить их графики:

1. $y=x^3-3x^2+2$. 2. $y=x^3-3x^2+3x-15$. 3. $y=x^3-3x^2+6x+3$.

Определить число вещественных корней уравнений:

4. $2x^3-3x^2-12x+15=0$. 5. $4x^3+15x^2-18x-2=0$. 6. $2x^3-x^2-4x+3=0$. 7. $x^3-x^2+2=0$.

ГЛАВА IV

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 1. Функциональная зависимость

В природе, в технике, в математике мы чрезвычайно часто встречаемся с функциональными зависимостями. Функциональная зависимость одной величины (y) от другой (x) означает, что каждому значению x соответствует определенное значение y.

Величина x при этом называется независимой переменной, y — функцией этой переменной. Иногда x называют аргументом функции.

Приведем несколько примеров из геометрии и физики:

1) Объем шара V является функцией его радиуса r

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

2) Объем V конуса с данной высотой h зависит от радиуса его основания r

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

3) Путь z, пройденный свободно падающим телом, зависит от времени t, протекшего с момента, когда началось падение,

$$z = \frac{gt^2}{2}.$$

4) Сила тока i по закону Ома зависит от сопротивления проводника R при данной разности потенциалов u

$$i = \frac{u}{R}. \qquad (1.1)$$

Можно было бы привести еще множество примеров такого рода.

Характерно, что в природе и в технике в большинстве случаев интересующая нас величина (функция) зависит от нескольких величин. Так, например, в последнем примере сила тока зависит от двух величин: от разности потенциалов u и от сопротивления проводника R. Объем конуса зависит от его высоты h и от радиуса основания r.

Считая заданными и постоянными все величины, кроме одной, мы изучаем зависимость функции от одной переменной; в данной книге мы в основном ограничиваемся функциями одной переменной.

Так, например, взяв данную аккумуляторную батарею с определенной разностью потенциалов u, будем менять сопротивление проводника R и измерять силу тока i; в такой постановке опыта сила тока зависит только от сопротивления, величину u в формуле (1.1) следует рассматривать как постоянный коэффициент.

В математике функциональная зависимость чаще всего задается формулами, например,

$$y=2x+3, \quad y=x^2+5, \quad y=3x^3-x^2-x, \qquad (1.2)$$
$$y=\frac{x-1}{x+1}.$$

В этих формулах очевидно, что мы имеем дело с функциями одной переменной. Формула дает способ вычисления значений функции при каждом заданном значении независимой переменной.

Зная формулу, дающую зависимость y от x, легко составить таблицу значений y для нескольких произвольно заданных значений x.

Составим, например, табл. 1 для третьей функции из (1.2). В верхней строке даны выбранные нами значения x, в нижней строке под каждым данным x дано соответствующее значение y.

Таблица 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=3x^3-x^2-x$	-87	-26	-3	0	1	18	69

Понятно, что по данной формуле можно составить и более подробную таблицу, задавая, например, значения $x=0$; 0,1; 0,2; ... и т. д. Таким образом, формула «сильнее» любой таблицы. Формула содержит не только те сведения, которые позволяют составить данную таблицу, но позволяет также найти значения функции при значениях независимой переменной, не содержащихся в данной таблице. С другой стороны, таблица удобнее, так как с ее помощью можно быстрее найти значение y при данном x — если это x есть в таблице,— поскольку вычисления по формуле уже были проделаны при составлении таблицы.

В природе и в технике, когда уже установлен закон интересующего нас явления, этот закон выражается формулой. Однако бывает и такое положение, когда теории явления нет и физик (или химик, биолог, техник) может дать только результаты проделанных им опытов — зависимость исследуемой величины от величины, задаваемой при постановке опыта. Так обстоит дело, например, при исследовании зависимости сопротивления проводника от его температуры. В этом случае функциональная зависимость может быть задана только в виде таблицы, содержащей результаты опыта.

Из опыта известно, что для данного проводника (из данного материала, данного сечения и данной длины) электрическое сопротивление зависит от температуры проводника. При каждом значении температуры T проводник имеет определенное сопротивление R, так что можно говорить о функциональной зависимости R от T, о том, что сопротивление R есть функция температуры T.

Проводя измерения, можно найти значения R при различных T и таким образом найти зависимость $R(T)$; при этом результатом опытов является табл. 2, в которой даны значения R при различных T, например:

Таблица 2

T (градусы Цельсия)	0°	25°	50°	75°	100°
R (омы)	112,0	118,4	124,6	130,3	135,2

Если нас интересуют значения R при других температурах, не входящих в таблицу, то в принципе нужны

дополнительные измерения, так как точная формула, дающая зависимость $R(T)$, неизвестна. Практически можно подобрать приближенную формулу, которая хорошо согласовалась бы с опытом при тех температурах, при которых приведены измерения; возьмем, например, формулу

$$R = 112{,}0 + 0{,}272T - 0{,}0004T^2$$

и составим табл. 3 по этой формуле.

Таблица 3

T	0	25	50	75	100
R (по формуле)	112,0	118,55	124,6	130,15	135,2

Формула дает значения R, очень близкие к опыту, при тех температурах, при которых проделаны измерения; поэтому законно предположение, что и при промежуточных температурах (например, при 10° или при 80° и 90°) формула также правильно описывает функциональную зависимость $R(T)$. Однако пользование формулой за пределами исследованного интервала (например, при $-200°$ С или $+500°$ С) может привести к ошибкам, поскольку нет оснований для того, чтобы $R(T)$ выражалось квадратным трехчленом.

Такие формулы, полученные не из теории, а подбором, называют эмпирическими (т. е. опытными, основанными на опыте).

§ 2. Координаты

Для наглядного изображения функциональной зависимости с помощью рисунка (графика) пользуются координатами. Проведем на плоскости две перпендикулярные прямые. Горизонтальная прямая называется «ось x» (ось икс) или, иначе, «ось абсцисс»; вертикальная прямая — «ось y» (ось игреков) или «ось ординат». Точка пересечения прямых называется «начало координат» (точка O на рис. 88). Обычно представляют себе, что плоскость, на которой проведены оси x и y, не лежит на столе, а поставлена перед читателем вертикально, как стена, против которой Вы сидите. При этом

стрелка на оси x показывает слева направо, а стрелка на оси y — снизу вверх.

Определенная пара значений x и y, например $x=2$, $y=4$, изображается на графике одной точкой (точка A). Положение этой точки определяется следующими условиями: перпендикуляр AB, опущенный из точки A на ось x, отсекает на этой оси отрезок OB, равный двум единицам длины; отрезок OB от начала координат O до основания перпендикуляра B считается положительным и соответствует положительному значению x, когда точка B лежит правее точки O.

Перпендикуляр AC, опущенный из точки A на ось y, отсекает на оси отрезок OC, длина которого равна 4. На оси y положительные значения y соответствуют основанию перпендикуляра C, лежащему выше начала координат O. Принято положительное направление оси отмечать стрелкой

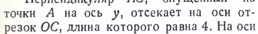


Рис. 88.

и около нее ставить букву, обозначающую название оси. Представляя себе, что плоскость вертикальна, говорят «чем больше y, тем в ы ш е лежит точка», отрицательные y лежат н и ж е положительных. Практически удобно находить точки и строить графики с помощью миллиметровой бумаги, на которой уже заранее проведена сетка перпендикуляров.

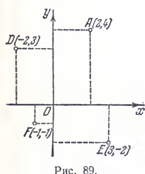


Рис. 89.

Важный практический совет заключается в том, что надо приучаться с р а з у ставить на чертеже точку A, соответствующую заданным значениям x и y. Не следует ставить на чертеже точки B и C и проводить пунктирные линии (перпендикуляры) AB и AC: всю эту работу следует проводить в уме и не загромождать чертеж лишними линиями и обозначениями.

Отрицательные значения x отсчитываются влево от O, отрицательные значения y отсчитываются вниз от O. На рис. 89 приведено несколько примеров точек, для которых

x и y разного знака. Читатель должен проследить, согласен ли он с тем, как поставлены эти точки, и, таким образом, проверить, полностью ли он понял предыдущее.

Точки на рис. 89 следующие:

$$A:\quad x=2,\quad y=4;\qquad D:\quad x=-2,\quad y=3;$$
$$E:\quad x=3,\quad y=-2;\qquad F:\quad x=-1,\quad y=-1.$$

Координаты точек иногда указывают сокращенно, в скобках после названия точки, причем на первом месте ставится значение x (абсцисса точки), на втором месте — значение y

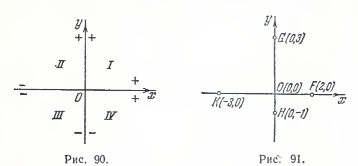


Рис. 90. Рис. 91.

(ордината точки). Для перечисленных четырех точек A, D, E, F такие обозначения приведены на рис. 2.

Оси координат делят плоскость рисунка на четыре части — четверти; четверти перенумерованы на рис. 90. В каждой четверти x и y имеют определенный знак: в I четверти $x > 0$, $y > 0$, т. е. x и y положительны; во II четверти $x < 0$, $y > 0$, т. е. x отрицателен, y положителен; в III четверти $x < 0$, $y < 0$, т. е. x и y отрицательны; в IV четверти $x > 0$, $y < 0$, т. е. x положителен, y отрицателен. Знаки x и y в каждой четверти показаны также на рис. 90. Сравните их со знаками координат точек A, D, E, F на рис. 89.

Если для точки G (рис. 91) задано, что $x=0$, то такая точка лежит на оси y; при этом как раз перпендикуляр из G на ось x совпадает с осью y. Значит, основание перпендикуляра совпадает с началом координат O, так что расстояние от основания перпендикуляра до начала координат равно нулю, поэтому и можно сказать, что равна нулю

абсцисса точки G, лежащей на оси y. Если для точки F задано, что $y=0$, то такая точка лежит на оси x; при этом перпендикуляр из точки F, опущенный на ось y, совпадает с осью x, а его основание — с началом координат O.

Примеры таких точек показаны на рис. 4:

$$G(x=0, \quad y=3), \qquad F(x=2, \qquad y=0),$$
$$H(x=0, \quad y=-1), \quad K(x=-3, \quad y=0).$$

Наконец, точка, у которой $x=0$, $y=0$, есть не что иное, как начало координат O.

Выше мы специально советовали не наносить на чертеж основания перпендикуляров, т. е. поступать не так, как это было сделано на рис. 88 и 89.

На рис. 88 необходимо было поставить точку $A(x=2, y=4)$, точки B и C были вспомогательными, служили только для построения точки A; они были полезны, когда мы только делали первый шаг, впервые определяли понятие координат. Потом следует научиться прямо ставить точку A: если на чертеже нанесены точки B и C, то можно принять их за заданные точки, можно подумать, что нам было задано построить три точки:

$A(2, 4)$, $B(2, 0)$, и $C(0, 4)$.

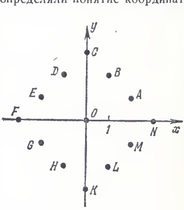


Рис. 92.

Читатель должен потренироваться в том, чтобы быстро ставить на графике любые точки, с положительными, отрицательными и нулевыми значениями x и y, а также быстро называть хотя бы приближенно, но с правильными знаками x и y для точки, поставленной на чертеже.

Упражнение

1. Назовите координаты точек от A до 0 (рис. 92).

§ 3. Геометрические величины, выраженные через координаты

Задание двух чисел — значений x и y — определяет положение точки на плоскости. Поэтому и все геометрические величины, относящиеся к этой точке, можно выразить через координаты точки.

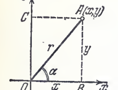


Рис. 93.

Найдем расстояние r точки A с координатами x и y от начала координат, т. е. длину отрезка r прямой OA, соединяющей начало координат O с точкой A (рис. 5), а также угол α (α — «альфа» — первая буква греческого алфавита) *) между прямой OA и осью абсцисс.

Проводим вспомогательные линии AB и AC. Длина OB равна x, длина AB равна длине OC, т. е. равна y. Из прямоугольного треугольника OAB по теореме Пифагора

$$(OA)^2 = r^2 = (OB)^2 + (AB)^2 = x^2 + y^2,$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Далее по определению тангенса угла имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x}.$$

Так, например, пусть $x = 2$, $y = 3$ (рис. 93). Тогда $r = \sqrt{13} \approx 3{,}6$,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \approx 56^\circ.$$

Заметим, что угол α всегда отсчитывается от положительного направления оси x, поэтому, например, если $y = 2$, $x = -2$ (рис. 94), то угол α — тупой, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-2} = -1$, $\alpha = 135^\circ$.

Когда точка лежит ниже оси x, то принято отсчитывать угол α вниз от оси, считая при этом α отрицательным. На рис. 95 показаны два примера: точка $A\,(x = 2,\ y = -2)$, для нее $\alpha = -45^\circ$, и точка $B\,(x = -3,\ y = -3)$, для нее угол $\alpha = -135^\circ$. Таким образом, угол α для любой точки лежит в пределах от -180° до $+180^\circ$.

*) Греческий алфавит и названия греческих букв даны в конце книги, на стр. 560.

Легко решить и обратную задачу: пусть дано, что точка A находится на заданном расстоянии r от начала координат O и отрезок OA образует угол α с осью x (подразумевается —

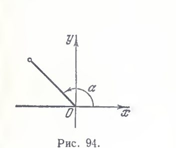


Рис. 94.

Рис. 95.

с положительной, правой частью оси x). Требуется найти координаты точки A. Глядя на рис. 93, получим:

$$x = r\cos\alpha,$$
$$y = r\sin\alpha.$$

Эти формулы правильны без исключений, для любых положительных и отрицательных углов α, правильно дают знаки x и y в любой четверти.

Перейдем к задачам с двумя точками, A_1 и A_2; координаты первой точки обозначим x_1, y_1, координаты второй точки x_2, y_2 (рис. 96). Найдем расстояние r_{12} между этими точками и угол α_{12} между отрезком A_1A_2 и осью x*).

*) Значки снизу у букв называются индексами. По-латыни индекс значит «указатель». Их не надо путать с показателями. Читается такое выражение: x_1 — икс-один, A_2 — а-два. Одинаковые буквы с разными индексами (y_0, y_1, y_2, y_a, y_b) применяют вместо разных букв, для того чтобы показать, что речь идет о похожих (но в то же время разных) величинах. Так, например x_1 и x_2 — обе эти величины откладываются по оси x, обе являются «иксами», абсциссами. В то же время они относятся к разным точкам. Величины, обозначаемые разными буквами, но с одинаковым индексом, относятся к одной и той же точке: A_1 — обозначение некоторой точки, x_1 — ее абсцисса, y_1 — ее ордината. Иногда ставят и два индекса, например r_{12} (читать: эр-один-два, а не эр-двенадцать) — расстояние между точкой первой (A_1) и второй (A_2).

Удобно провести через точку A_1 прямую, параллельную оси x, а через точку A_2 — прямую, параллельную оси y; на рис. 96 они проведены пунктиром, а точка их пересечения обозначена B. При этом в треугольнике A_1A_2B отрезок A_1B равен x_2-x_1, отрезок A_2B равен y_2-y_1. Все построение треугольника A_1A_2B подобно построению рис. 93.

По теореме Пифагора получим:

$$r_{12}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Угол α_{12} находится из условия

$$\operatorname{tg}\alpha_{12}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (3.1)$$

Читатель должен убедиться, что формулы правильны при любых знаках всех четырех величин x_1, y_1, x_2, y_2 и при любых соотношениях $x_1>x_2$ или $x_1<x_2$, $y_1>y_2$ или $y_1<y_2$.

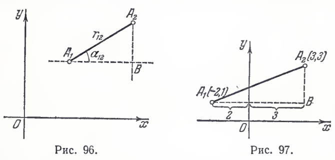


Рис. 96. Рис. 97.

Так, например, на рис. 97 показан случай $x_1<0$, $x_2>0$, координаты $A_1(x_1=-2,\ y_1=1)$, $A_2(x_2=3,\ y_2=3)$. В этом случае длина отрезка A_1B равна сумме абсолютных величин *) $|x_1|=2$, $|x_2|=3$. Но это как раз и соответствует общей формуле

$$A_1B=x_2-x_1=3-(-2)=3+2=5.$$

Следовательно, правильны и выражения для r_{12} и $\operatorname{tg}\alpha_{12}$.

*) Прямые черточки заменяют слова «абсолютная величина». Таким образом, для положительной величины этот знак ничего не меняет, $|3|=3$, $|0{,}1|=0{,}1$. Отрицательная величина, поставленная между прямыми черточками, равна положительной величине, получающейся умножением данной величины на -1; так, например, $|-3|=3$; $|-0{,}1|=0{,}1$. Иначе говорят иногда «модуль»: $|-3|$ — это модуль минус трех, он равен плюс трем.

Рассмотрим теперь задачи, относящиеся к трем точкам: A_1, A_2, A_3. Как выяснить без построения, путем вычисления по значениям координат точек, лежат ли эти три точки на одной прямой? Очевидно, что когда угол α_{12} отрезка A_1A_2 с осью x равен углу α_{13} отрезка A_1A_3 с осью x, то это значит, что отрезки A_1A_2 и A_1A_3 лежат на одной прямой. На рис. 98 показан случай, когда $\alpha_{13} > \alpha_{12}$, точка A_3 лежит выше продолжения прямой A_1A_2, но из этого же рисунка

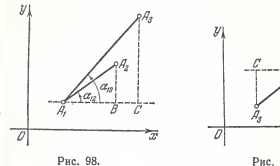


Рис. 98. Рис. 99.

видно, что если бы α_{13} было равно α_{12}, то точка A_3 лежала бы на прямой, продолжающей отрезок A_1A_2.

Из выражения тангенса угла (3.1) следует, что при $\alpha_{12} = \alpha_{13}$ между координатами точек имеет место соотношение

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}. \tag{3.2}$$

Без применения тригонометрии можно сказать, что условие (3.2) — это условие подобия двух прямоугольных треугольников, A_1A_2B и A_1A_3C. Подобие треугольников приводит к равенству угла при вершине A_1.

Соотношение (3.2) применимо и в том случае, когда точка A_1 лежит между точками A_2 и A_3 (рис. 99): если три точки лежат на одной прямой, то из подобия A_1A_2B и A_1A_3C следует пропорция (3.2). В примере, показанном на рис. 99, $x_3 - x_1 < 0$, $y_3 - y_1 < 0$, но отношение их положительно и равно отношению двух положительных величин $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$.

Упражнения

1. Нанести точки (1; 1); (—1; 1); (—1; —1); (1; —1).

2. Нанести точки (1; 5); (5; 1); (—1; 5); (—5; 1); (—1; —5); (—5; —1); (1; —5); (5; —1).

3. Нанести точки (0; 4); (0; —4); (4; 0); (—4; 0).

4. Найти расстояние от начала координат и угол α для точек (1; 1); (2; —2); (—3; —3); (—4; 4).

5. Найти расстояние между парами точек: $A_1(1, 1)$, $A_2(1, -1)$; $A_1(1, 1)$, $A_2(-1, -1)$; $A_1(2, 4)$, $A_2(4, 2)$; $A_1(-2, -4)$, $A_2(-4, -2)$.

6. Выяснить, лежат ли на одной прямой тройки точек: $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(4, 6)$; $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(-2, -3)$; $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(-2, 3)$.

7. Выписать координаты вершин квадрата со стороной a, если диагонали квадрата совпадают с осями x и y.

8. Выписать координаты вершин правильного шестиугольника со стороной a, если одна из его диагоналей совпадает с осью x, а центр лежит в начале координат.

9. а) Выписать координаты вершин равностороннего треугольника со стороной a, с основанием, лежащим на оси x, и вершиной противолежащего угла на оси y. б) То же для случая, когда основание лежит на оси x и вершина одного из углов совпадает с началом координат.

10. Дана точка A_1 с координатами x_1, y_1. Выписать координаты точки A_2, расположенной симметрично A_1 относительно оси x; то же для A_3, расположенной симметрично A_1 относительно оси y; то же для A_4, расположенной симметрично A_1 относительно начала координат.

§ 4. Графическое изображение функций. Уравнение прямой

В § 2 было показано, как каждой паре значений x, y соответствует определенная точка в плоскости.

Если задано, что y есть определенная функция x, то это значит, что каждому значению x отвечает определенное значение y; следовательно, задаваясь многими различными значениями x, мы найдем различные соответствующие им y, и эти пары значений дадут много точек на плоскости. Если увеличивать число отдельных значений x, беря их все более близкими между собой, то, в конце концов, точки сливаются в сплошную кривую. Эта кривая называется графиком функции. В действительности обычно достаточно нанести на график несколько точек, а промежуточные точки и весь график функций можно получить, соединяя плавной линией нанесенные точки. Однако для того чтобы при этом не сделать грубых ошибок, нужно иметь общее представление о виде кри-

вых, изображающих различные функции. Мы начнем с изучения нескольких типичных и наиболее важных функций.

Рассмотрим так называемую линейную зависимость

$$y = kx + b.$$

Пусть, например,

$$y = 2x + 1.$$

Построим несколько точек, для которых x и y даны в табл. 4.

Таблица 4

x	0	1	2	3
y	1	3	5	7

Нанесем эти точки на график (рис. 100). Бросается в глаза, что эти точки лежат на одной прямой. В таком случае, проводя эту прямую линию (отсюда название «линейная зависимость», «линейная функция»), получим полный график функции, для любого x соответствующая точка (x, y) лежит на прямой.

Как доказать для любой функции вида $y = kx + b$ при любых k и b, что все точки ее графика лежат на одной прямой? Для этого проверим, что условие, выведенное в конце § 3, выполняется для любой тройки точек графика. В самом деле, рассмотрим две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2\ y_2)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = kx + b$. Тогда

$$y_2 - y_1 = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1),$$

откуда

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$$

Рис. 100.

Отношение оказалось не зависящим от x_1 и x_2. Следовательно, и для любой другой пары точек графика, и в частности для пары точек $A(x_1, y_1)$ и $C(x_3, y_3)$, получим

также

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=k.$$

Значит, для любых трех точек графика $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ имеет место соотношение

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1},$$

т. е. любые три точки лежат на одной прямой, а следовательно, *все* точки графика функции $y=kx+b$ лежат на одной прямой. Значит, графиком функции $y=kx+b$ является прямая линия.

Уравнение $y=kx+b$ называют уравнением прямой. Коэффициент k определяет угол между прямой и осью x. Подставляя в уравнение $x=0$, получим $y=b$. Значит, одна из точек прямой — это точка $(0, b)$; эта точка лежит на оси y на высоте b над началом координат (если $b<0$, то точка лежит под началом координат). Таким образом, b есть ордината точки пересечения прямой с осью y, $|b|$ — длина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат (на рис. 100, $b=1$).

Для того чтобы построить прямую, соответствующую данному уравнению, не нужно вычислять координаты большого числа точек и наносить их на график: ясно, что если построены две точки, то тем самым полностью определена прямая, проходящая через эти две точки.

Можно, например, всегда брать две точки: при $x=0$, $y=b$ и при $x=1$, $y=b+k$, и приводить прямую по этим точкам. Можно в качестве второй точки брать точку пересечения прямой с осью x ($x=x_0$, $y=0$). Из условия $y=kx_0+b=0$ найдем $x_0=-\frac{b}{k}$.

Полезно так поупражняться в построении графиков, чтобы сразу, с одного взгляда на уравнение, примерно представлять себе ход и положение соответствующей линии.

Для линейной функции, графиком которой является прямая линия, это совсем легко. Ведь на самом деле ход прямой зависит только от двух величин k и b, входящих в уравнение прямой. Таким образом, нужно разобрать не так уж много вариантов: k может быть положительно или отрицательно, k может быть большим или малым по абсо-

лютной величине (больше 1 или меньше 1), b может быть положительным или отрицательным.

Покажем, как проводится такое исследование.

Начнем со случая $b=0$, т. е. с уравнения $y=kx$. Соответствующая прямая, очевидно, проходит через начало координат, т. е. через точку $x=0$, $y=0$. На рис. 101 показано несколько прямых с различными k: $k=0,1$; $k=1$; $k=10$; $k=-0,1$; $k=-1$; $k=-10$. Значения k обозначены на обоих концах каждой прямой. Проверьте правильность проведения каждой прямой, и тогда Вы убедитесь в правильности следующих общих выводов:

1) если $k>0$, то прямая лежит в I и III четверти, если $k<0$, прямая лежит во II и IV четверти.

Рис. 101.

2) При $k=1$, согласно предыдущему, прямая лежит в I и III четверти. Часть прямой, лежащая в I четверти, образует угол $\alpha=45^\circ$ с осью x, т. е. делит пополам угол между осью x и осью y; напомним, что под словами «угол с осью x» подразумевается угол с положительным направлением оси x, показанным стрелкой. Продолжение прямой, лежащее в III четверти, образует с осью x угол $\alpha=-135^\circ$ (на рис. 101 углы не показаны).

3) При $k=-1$ часть прямой, лежащая во II четверти, образует угол $\alpha=135^\circ$ с осью x, а продолжение прямой в IV четверти — угол $\alpha=-45^\circ$.

4) Если $|k|<1$, прямая идет полого, т. е. идет ближе к оси x, чем к оси y, и тем более полого, чем меньше $|k|$. Если $|k|>1$, прямая идет круто, ближе к оси y, чем к оси x, тем круче, чем больше $|k|$.

Теперь, когда это усвоено, разберем общий случай прямой с b, отличным от нуля.

Пусть на графике нарисована прямая с $b=0$, например $y=0{,}5x$ (рис. 102). Чем отличаются от нее прямые с $b\neq 0$, но с тем же k, т. е., например, прямая $y=0{,}5x+2$? Для удобства будем обозначать $y_0=0{,}5x$ и $y_2=0{,}5x+2$ *). При каждом данном x величина y_2 на две единицы больше y_0. Значит, точки прямой y_2 получатся из точек прямой y_0 с тем же x путем подъема на две единицы. Значит, прямая y_2 параллельна прямой y_0 и лежит выше нее на две единицы. Очевидно, что такое правило справедливо при любом b (если $b<0$, то прямая лежит ниже начала координат, ниже соответствующей прямой $y=kx$).

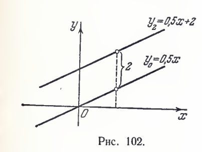


Рис. 102.

Усвоив, как идут прямые с уравнениями $y=kx$ при различных k, мы теперь легко представим себе общий ход прямой $y=kx+b$ с любыми k и b. Упражнения для тренировки даны в конце параграфа.

Величину k в уравнении $y=kx+b$ называют угловым коэффициентом прямой; короче и нагляднее можно назвать k «крутизной прямой», так как от этой величины зависит наклон прямой. В частном случае $k=0$ получается уравнение $y=b$ (подразумевается $y=b$ при любых значениях x), чему соответствует горизонтальная прямая, крутизна которой равна нулю. Можно представить себе пешехода, идущего по прямой слева направо, в сторону возрастающих значений x. Если $k>0$, то пешеход поднимается в гору (крутизна положительная), если $k<0$, пешеход идет под гору (отрицательная крутизна). Величина k дает отношение изменения функции к изменению ее аргумента: в самом деле,

$$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{kx_2+b-(kx_1+b)}{x_2-x_1}=k.$$

*) Здесь мы пользуемся индексами несколько иначе, чем раньше. y_0 относится к целой прямой, это не ордината определенной точки, а ордината произвольной точки на прямой с данным k и $b=0$; y_2 — это ордината произвольной точки на прямой с данным k и $b=2$, т. е. y_0 это не число, а функция x, $y_0(x)$, и соответственно y_2 есть $y_2(x)$, другая функция x.

Такое отношение мы уже вычисляли выше, когда доказывали, что линейная функция на графике изображается прямой линией.

В дальнейшем в общем случае произвольной функции мы будем рассматривать величину

$$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1},$$

равную тангенсу угла между отрезком, соединяющим две точки x_1, $y(x_1)$ и x_2, $y(x_2)$, и осью абсцисс. Линейная функция отличается тем, что для нее такая величина одинакова для любой пары точек, не зависит ни от x_2, ни от x_1, поэтому и получается, что все точки у линейной функции лежат на одной прямой.

Упражнение

Построить прямые: $y=3x$, $y=3x+2$, $y=3x-1$, $y=2-x$, $y=2-0{,}5x$, $y=-x-3$.

§ 5. Парабола

Рассмотрим функции

$$y=ax^2$$

с различными значениями a. Возьмем сначала пример с $a=1$.

Какие общие свойства этой функции?

1) Всегда $y>0$, как при $x>0$, так и при $x<0$. Значит, кривая вся расположена выше оси x и только в начале координат соприкасается с осью x.

2) Наименьшее значение (минимум) y достигается при $x=0$. Минимум y равен 0. На графике минимум изображается наиболее низкой точкой кривой.

3) При двух одинаковых по абсолютной величине и противоположных по знаку значениях x получаются одинаковые как по знаку, так и по величине значения y. Значит, кривая симметрична относительно оси y.

Кривая показана на рис. 103. Такая кривая называется *параболой* (при любом значении a).

При любом положительном a уравнение $y=ax^2$ имеет те же свойства, которые указаны выше для $y=x^2$.

Что будет, если $a < 0$? Рассмотрим пример $a = -2$, $y = -2x^2$. Кривая показана на рис. 104 (масштаб рис. 104 более мелкий, чем рис. 103). Свойства этой кривой:

1) $y < 0$ при любых x. Кривая вся лежит ниже оси x и касается оси x в начале координат;

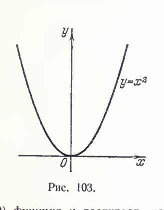


Рис. 103. Рис. 104.

2) функция y достигает наибольшего значения — максимума — при $x = 0$. Этот максимум равен $y = 0$. Напомним, что отрицательные величины меньше нуля, так что самое большое (максимальное) значение y среди приведенных в таблице есть как раз $y = 0$. На графике максимум изображается верхней точкой кривой;

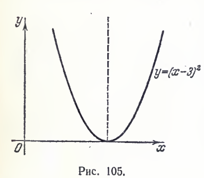


Рис. 105.

3) кривая симметрична относительно оси y, так же как и в случае положительного a.

Рассмотрим теперь сходное уравнение

$$y = a(x - n)^2.$$

Возьмем пример: $a = 1$, $n = 3$. Кривая изображена на рис. 105. Это — та же парабола, что и на рис. 103, но сдвинутая в п р а в о на три единицы по оси x.

Это простое обстоятельство обычно с трудом усваивается.

Если дана функция $y=f(x)$ и мы сравниваем с ней другую функцию $y=f(x-n)$, то второй график смещен относительно первого вправо на n единиц. При этом подразумевается, что в обоих случаях f — это одна и та же функция; в нашем примере знак f означает возведение в квадрат аргумента, т. е. той величины, которая стоит в скобках под знаком функции:

$$f(g)=g^2,\ f(h)=h^2,$$
$$f(x)=x^2,\ f(-x)=x^2,$$
$$f(x-2)=(x-2)^2,$$
$$f(x-n)=(x-n)^2.$$

Почему график смещается вправо? Поясним это подробнее. Пусть на графике функции $y_1=f(x)$ есть какая-то характерная точка $x=x_0$ (своего рода «зарубка»). Например, в этой точке функция может иметь излом, или максимум, или просто принимать какое-то определенное значение y_0. Тогда на графике новой функции $y_2=f(x-n)$ то же значение y_0 или тот же излом появляется, когда аргумент функции f равен старому значению x_0, т. е. $x-n=x_0$. Но это значит, что координаты «зарубки» теперь таковы: $x=x_0+n$, $y=f(x_0)$. Отсюда видно, что любая «зарубка» вместе со всем графиком перемещается вправо ($x=x_0+n$ вместо $x=x_0$). Сравните кривые на рис. 103 и рис. 105; здесь в качестве «зарубки» удобно выбрать $x_0=0$, $f(x_0)=(0)^2=0$.

Хотя эти соображения и очень элементарны, но весьма важно их твердо усвоить, не просто выучить, а осознать. У многих учащихся первое побуждение — ответить, что при замене $y=x^2$ на $y=(x-3)^2$ кривая сместится влево, раз из величины x вычли 3. Надо не пожалеть времени на подробный разбор примеров.

Теперь можно сформулировать общие правила:

1) Кривая $y=a(x-n)^2$ имеет в качестве оси симметрии вертикальную прямую $x=n$.

2) Эта кривая при $a>0$ лежит выше оси x и имеет минимум $y=0$ при $x=n$. При $a<0$ кривая лежит ниже оси x и имеет максимум $y=0$ при $x=n$.

Наконец, есть еще одно видоизменение уравнения, которое не меняет формы кривой: рассмотрим функцию

$$y = a(x-n)^2 + m.$$

Очевидно, что соответствующая кривая отличается от предыдущей (без m) только сдвигом по вертикали на величину m. Положение оси симметрии кривой не изменяется; при $a > 0$ функция имеет минимум при $x = n$ и значение функции в минимуме равно

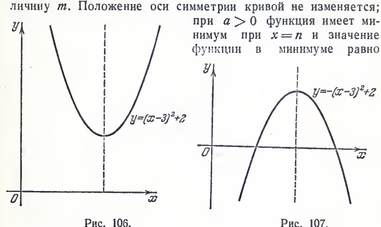


Рис. 106. Рис. 107.

$y = m$ (вместе со всей кривой на величину m сместился и минимум). При $a < 0$ точка $x = n$, $y = m$ есть точка максимума. Приведем два примера:

$$x = (x-3)^2 + 2 \qquad (\text{рис. } 106).$$
$$y = -(x-3)^2 + 2 \qquad (\text{рис. } 107).$$

Ось симметрии на обоих рисунках проведена пунктиром. Точка минимума на рис. 106 и точка максимума на рис. 107 лежат на пересечении кривой и пунктирной оси симметрии.

Итак, функция

$$y = a(x-n)^2 + m$$

представляет собой параболу с осью симметрии $x = n$ и минимумом y (если $a > 0$) в точке $x = n$, $y = m$. При $a < 0$ та же точка представляет собой максимум y.

На графике минимальное (в переводе на русский — наименьшее) значение y соответствует точке кривой, располо-

женной ниже всех других точек, т. е. точке кривой, у которой y меньше, чем у других точек. Максимум функции $y(x)$ (наибольшее значение функции) на графике соответствует точке, расположенной выше других точек. Вместо того, чтобы говорить о точке на графике, соответствующей минимуму или максимуму функции, мы кратко называем эту точку точкой минимума или максимума на кривой.

Раскрывая скобки у выражений $y = a(x-n)^2 + m$, запишем:

$$y = ax^2 - 2anx + an^2 + m.$$

Это выражение есть полином второй степени. Обычный способ записи самого общего полинома второй степени

$$y = a_1x^2 + bx + c.$$

Выбирая подходящие значения a, n, m в предыдущем выражении, можно всегда сделать его тождественным с последним выражением. Для этого сравним соответственно члены с x^2, с x и без x:

$$a_1x^2 = ax^2; \quad -2anx = bx; \quad an^2 + m = c.$$

Из первого выражения следует $a_1 = a$.

Из второго $-2an = b$; $n = -\frac{b}{2a}$.

Из третьего $an^2 + m = c$; $\quad m = c - an^2 = c - \frac{b^2}{4a}$.

Следовательно, можно написать тождество

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

С помощью графика параболы можно разобраться в решении квадратного уравнения и в различных случаях, которые при этом возникают. К решению квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

можно подойти так: рассмотрим всю кривую

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

и найдем точки пересечения этой кривой с осью x. В этих точках $y = 0$, следовательно, значения x, соответствующие точкам пересечения, это и есть корни квадратного уравнения.

Но мы знаем, что кривая $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола. Нам известно, что у этой параболы есть ось симметрии — вертикаль $x = -\frac{b}{2a}$, что при $a > 0$ парабола имеет точку минимума на оси и высота этого минимума равна $y = c - \frac{b^2}{4a}$ (мы смотрим на вторую часть последней формулы, имеющую привычный вид $a(x-n)^2 + m$). «Рога» параболы при $a > 0$ обращены вверх.

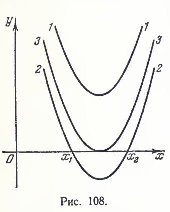


Рис. 108.

Ясно, что если минимум лежит выше оси x, то парабола нигде не пересекает ось x (рис. 108, кривая *1*). Значит, при

$$a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0$$

квадратное уравнение не имеет вещественных корней *).

Если же минимум лежит ниже оси x, а рога параболы поднимаются вверх, то обязательно парабола в двух точках пересечет ось x; точки эти симметрично расположены относительно линии $x = n = -\frac{b}{2a}$ (кривая *2* рис. 108). Значит, при

$$a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0$$

уравнение имеет два корня x_1 и x_2, показанных на рис. 108.

Наконец, возможен и промежуточный случай, когда парабола касается оси x (кривая *3* рис. 108). Этот случай достигается при

$$c - \frac{b^2}{4a} = 0.$$

Если постепенно переходить от кривой *2* к кривой *3*, поднимая параболу, то, очевидно, два корня x_1 и x_2 будут сбли-

*) На графике откладываются только вещественные x и y, поэтому комплексные и мнимые корни не соответствуют никаким точкам пересечения на графике.

жаться, пока они не сольются в момент касания. Поэтому в случае $c-\frac{b^2}{4a}=0$ говорят не об одном корне, а о двух равных (слившихся) корнях уравнения.

Таким же способом рассматривается случай $a<0$, когда кривая имеет максимум, а рога ее обращены вниз. Предлагаем читателю самому нарисовать кривые и проверить, что при:

$a<0, \quad c-\frac{b^2}{4a}<0$ — нет вещественных корней,

$a<0, \quad c-\frac{b^2}{4a}>0$ — два вещественных корня,

$a<0, \quad c-\frac{b^2}{4a}=0$ — касание, два равных корня.

Обычная формула корней квадратного уравнения

$$x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Уравнение имеет два вещественных корня в том случае, если можно извлечь $\sqrt{b^2-4ac}$, т. е. если

$$b^2-4ac>0.$$

Запишем это выражение так:

$$b^2-4ac=-4a\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Условие $b^2-4ac>0$ выполняется в двух случаях:

1) $a>0,\ \ c-\frac{b^2}{4a}<0$,

2) $a<0,\ \ c-\frac{b^2}{4a}>0$.

Это и есть те два случая существования двух корней, которые были получены выше из рассмотрения кривых $y=ax^2+bx+c$.

Заметим, наконец, что в зависимости от знака коэффициента a при x^2 в уравнении параболы кривая расположена выпуклостью вниз (при $a>0$) или выпуклостью вверх (при $a<0$). Это свойство не зависит от значений и знаков b и c в уравнении параболы $y=ax^2+bx+c$.

Точное определение выпуклости такое: возьмем на кривой две точки $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$ и проведем через них прямую. Если часть кривой, расположенная между этими точками,

лежит н и ж е прямой, то говорят, что кривая обращена выпуклостью в н и з. Если часть кривой, расположенная между точками, лежит в ы ш е прямой, говорят, что кривая обращена выпуклостью в в е р х.

Выпуклость параболы легко увидеть наглядно из чертежа, но можно определить ее и с помощью алгебры. Для этого возьмем произвольные x_1 и x_2. Им соответствуют точки на параболе $A(x_1,\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c)$ и $B(x_2,\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c)$. Найдем координаты точки M, лежащей на середине отрезка прямой AB. Можно показать геометрически, что если отрезки AM и MB равны (рис. 109), то координаты точки $M(x_m, y_m)$ суть средние арифметические координат A и B

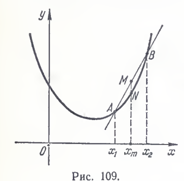


Рис. 109.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Найдем теперь координаты точки $N(x_n,\ y_n)$, лежащей на параболе при $x_n = x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Подставляя $x_n = \frac{x_1 + x_2}{2}$ в уравнение, найдем y_n. Читатель может убедиться, что

$$y_n - y_m = a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(a\,\frac{x_1^2}{2} + a\,\frac{x_2^2}{2}\right) = -a\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2.$$

Остальные члены с b и c сокращаются.

Величина $\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$ положительна при любых x_1, x_2. Следовательно, при $a > 0$, $y_n < y_m$ — точка на параболе ниже соответствующей (с тем же x) точки на прямой, т. е. парабола выпукла книзу.

§ 6. Кубическая парабола, гипербола, круг

Рассмотрим коротко еще несколько примеров кривых, изображающих простые функции.

На рис. 110 изображена кривая, построенная по формуле

$$y = x^3 + x.$$

Эта кривая отличается тем, что на любом ее участке при увеличении x увеличивается также y: кривая идет так, что при передвижении слева направо линия поднимается. Кривая

не имеет ни максимума, ни минимума. Ясно, что такая кривая пересекает ось абсцисс только один раз, при $x=0$. На следующем рис. 111 изображена кривая, построенная по формуле

$$y=x^3-x. \tag{6.1}$$

Как видно из графика, на этой кривой есть два участка, где y возрастает с увеличением x — при отрицательных $x<-0{,}57$ и при положительных $x>+0{,}57$. Между ними на отрезке $-0{,}57<$ $<x<+0{,}57$ функция убывающая, с ростом x величина y убывает. Функция имеет максимум при $x=$ $=-0{,}57$, $y=+0{,}38$. Слово



Рис. 110. Рис. 111.

«максимум» не означает в данном случае, что $y=0{,}38$ есть вообще наибольшее возможное значение y, заданного выражением (6.1). Очевидно, что при больших положительных значениях x величина y принимает сколь угодно большие значения. Чем же выделяется точка максимума ($x=-0{,}57$, $y=+0{,}38$)?

Как видно из графика, в этой точке y больше, чем в соседних точках. Точка максимума отделяет участок, где функция является растущей (слева от максимума), от участка, где функция убывает (справа от максимума). Такой максимум называют локальным, потому что величина y в этой точке больше значений $y(x)$ в других точках лишь для x, не слишком далеких от $x=-0{,}57$. Аналогично в точке $x=+0{,}57$, $y=-0{,}38$ функция имеет локальный минимум.

На рис. 112 приведено еще два примера кривых, изображающих многочлен третьей степени. Кубическое уравнение, полученное приравниванием нулю многочлена, в случае верхней кривой имеет одно вещественное решение, $x=0{,}48$, а в случае нижней кривой — три корня $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Легко убедиться, что кубическое уравнение всегда имеет не менее одного вещественного корня: для этого читателю предлагается подумать о ходе кривой $y=ax^3+bx^2+cx+d$ при очень больших по абсолютной величине положительных и отрицательных значениях x.



Рис. 112. Рис. 113.

Далее, читателю предлагается самому построить кривые $y=x^3$ и $y=-x^3$.

На рис. 113 изображена кривая

$$y=\frac{1}{x},$$

называемая гиперболой. Особенность этой кривой заключается в том, что при x малом отрицательном y есть отрицательная величина, по модулю (т. е. по абсолютной величине) очень большая, а при малом положительном x y есть очень большая положительная величина — см. табл. 5.

Таблица 5

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1
y	-1	-10	-100	-1000	1000	100	10	1

Поэтому говорят, что значение y при $x=0$ есть $\pm\infty$, т. е. плюс бесконечность или минус бесконечность, в зависимости от того, с какой стороны мы подходим к $x=0$.

Как видно из рис. 113, кривая состоит из двух ветвей, при $x<0$ и при $x>0$, не соединенных между собой.

До сих пор мы задавали y как функцию x и строили соответствующую кривую. Теперь на примере круга решим обратную задачу: зададим кривую и найдем, какой функциональной зависимости y от x соответствует эта кривая. Рассмотрим круг радиуса r с центром в начале координат. Точки круга находятся на расстоянии r от начала координат. По теореме Пифагора это значит, что

$$x^2+y^2=r^2.$$

Если выразить явно y как функцию x, получим:

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}.$$

Когда мы рассматриваем круг как график функции $y(x)$, то из графика видно, что функция неоднозначна: при каждом значении x (при $|x|<r$) есть две точки на кривой — на верхней и на нижней полуокружности. Этим двум точкам соответствуют два знака квадратного корня. Функции $y=+\sqrt{r^2-x^2}$ соответствует верхняя полуокружность, функции $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ соответствует нижняя полуокружность.

Составим теперь уравнение круга с центром в точке (a, b). Поступим формально: мы знаем, что если заменить в выражении функции x на $x-a$, то график функции смещается на a единиц вправо. Значит,

$$y=\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

есть уравнение круга, смещенного вправо на a единиц, т. е. с центром в точке $(x=a,\ y=0)$ на оси x.

Далее, если ко всем значениям y добавить одну и ту же величину b, то весь график поднимется на b единиц*). Значит, искомое уравнение круга с центром в точке (a, b)

$$y = \pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}+b.$$

В данном случае проще было вывести уравнение непосредственно геометрически из выражения расстояния между точками (x, y) и (a, b)

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2.$$

Мы нарочно поступили более формально для того, чтобы еще на одном примере показать, как замена x на $x-a$ и y на $y-b$ сдвигает кривую.

§ 7. Изменение масштабов кривой

Из предыдущего параграфа мы знаем, как надо изменить уравнение кривой, чтобы кривая сместилась, т. е. чтобы произошел параллельный перенос кривой. При замене x на $x+a$ в выражении, связывающем y и x, соответствующая кривая смещается на a единиц влево, при замене y на $y+b$ кривая смещается на b единиц вниз. Для того чтобы сместить кривую на g единиц вправо, надо заменить x на $x-g$, чтобы поднять кривую на h единиц вверх, надо заменить y на $y-h$.

Уравнение круга радиуса r с центром в начале координат $x^2+y^2=r^2$. Уравнение круга такого же радиуса с центром в точке $x_C=g$, $y_C=h$, т. е. смещенного на g единиц вправо и на h единиц вверх (исходное положение — центр в начале), есть

$$(x-g)^2+(y-h)^2=r^2.$$

Для произвольной кривой, уравнение которой записано в виде $y=f(x)$, для смещения вправо на g и вверх на h единиц напишем:

$$y-h=f(x-g) \text{ или } y=h+f(x-g).$$

*) Можно было бы и здесь сказать, что график поднимается на b единиц, когда y заменяют на $y-b$, так что получится:

$$y-b=\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2},$$

что равносильно уравнению в тексте.

Для кривой, уравнение которой записано в виде $F(x, y) = 0$, для такого же переноса надо заменить уравнение на $F(x-g, y-h)=0$.

Теперь поставим вопрос: как изменить уравнение кривой, чтобы увеличить в C раз*) все вертикальные размеры?

Очевидно, надо вместо уравнения $y_0=f(x)$ взять уравнение $y_1=Cf(x)$, тогда при том же x величина y_1 в C раз больше, чем прежде, т. е. в C раз больше y_0.

В качестве примера вспомним уравнения прямых, проходящих через начало координат. Уравнение прямой, проходящей под углом 45° в I четверти,

$$y_0=x.$$

Уравнение

$$y_1=10x$$

соответствует прямой, идущей более круто, у которой при заданном x ордината больше в 10 раз (см. рис. 101).

Закон перехода от $y_0=f(x)$ к $y_1=Cf(x)$ можно записать и так: в уравнении кривой $y_0=f(x)$ заменяем y_0 на $\frac{y_1}{C}$, т. е. пишем $\frac{y_1}{C}=f(x)$. Тогда зависимость y_1 от x характеризуется тем, что кривая $y_1(x)$ вытянута в C раз по вертикали по сравнению с кривой $y_0(x)$.

На первый взгляд кажется, что не стоит тратить слов на две разные формулировки, тождественность которых настолько очевидна,

$$y_1=Cf(x) \rightarrow \frac{y_1}{C}=f(x).$$

«Что в лоб, что по лбу».

Но вторая формулировка с заменой y_0 на $\frac{y_1}{C}$ удобна для случая, когда кривая задана уравнением, не разрешенным относительно y, т. е. уравнением вида $F(x, y)=0$.

Так, например, уравнение окружности радиуса 1 удобно записать в виде

$$F(x, y_0)=x^2+y_0^2-1=0.$$

*) В дальнейшем для простоты изложения будем полагать, что $C > 1$; ведь увеличить в 2 раза какую-нибудь величину — это значит умножить ее на 2, но увеличить в 0,3 раза значит умножить на 0,3, т. е. в действительности уменьшить.

Как написать уравнение кривой, вытянутой в 3 раза по вертикали (рис. 114, кривая, обозначенная $y_1(x)$)?

По правилу, которое мы только что сформулировали, для этого в уравнении окружности заменим y_0 на $\frac{y_1}{3}$. Получим:

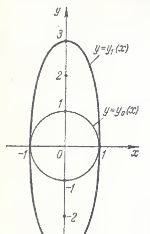


Рис. 114.

$$x^2+\left(\frac{y_1}{3}\right)^2-1=0.$$

Эта кривая называется «эллипсом».

В данном примере уравнения легко решаются:

$$y_0=\sqrt{1-x^2},\ \ y_1=3\sqrt{1-x^2},$$

и наглядно видно, что $y_1=3y_0$ при равных x. Но правило, что замена y на $\frac{y}{C}$ приводит к вытягиванию кривой в C раз по вертикали, справедливо и для кривых, заданных таким сложным уравнением $F(x, y)=0$, которое не решается алгебраически относительно y, например,

$$x+y\lg y=0.$$

Формулировка о замене y на $\frac{y}{C}$ легко переносится и на координату x. При замене x_0 на $\frac{x_1}{C}$ в уравнении кривой кривая растягивается по оси x в C раз, т. е. при равном y значение x_1 в C раз больше значения x_0.

Начнем не с доказательства, а с примеров:

$$y=x_0 \text{ и } y=\frac{x_1}{10}=0,1x_1$$

(см. рис. 101). Первая прямая идет под углом 45° к оси x, вторая идет более полого.

Второй пример:

$$x_0^2+y^2-1=0,\ \ \left(\frac{x_1}{2}\right)^2+y^2-1=0.$$

Первое уравнение соответствует окружности радиуса 1,

второе уравнение — это уравнение кривой, вытянутой по оси x в 2 раза. В самом деле, легко убедиться, что, например, пересечение кривой с осью x происходит в точках

$$y=0, \quad \left(\frac{x_1}{2}\right)^2-1=0, \quad x_1=\pm 2$$

(рис. 115).

Для доказательства можно уравиеиие решить относительно x: если $y=f(x_0)$, $y=f\left(\frac{x_1}{C}\right)$, то, решая, получим:

$$x_0=\varphi(y), \quad \frac{x_1}{C}=\varphi(y),$$

где φ есть функция, как говорят, обратная функции f.

Важно то, что в верхней строчке f это одна и та же функция в формулах с x_0 и с x_1. Поэтому φ тоже одинаковое для x_0 и x_1. Переписывая второе равенство

$$\frac{x_1}{C}=\varphi(y) \rightarrow x_1=C\varphi(y),$$

получим:

$$x_1(y)=Cx_0(y),$$

что и соответствует формулировке: при замене x на $\frac{x}{C}$ кривая растягивается в C раз по оси x.

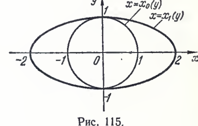


Рис. 115.

Приведем пример:

$$y=10^{x_0}, \quad y=10^{\frac{x_1}{2}}.$$

Функцией, обратной степени, является логарифм

$$x_0=\lg y, \quad \frac{x_1}{2}=\lg y, \quad x_1=2\lg y.$$

Как быть, если в уравнении $y=f(x)$ производится замена x на kx? Для того чтобы воспользоваться сформулированным выше правилом, вспомним правило деления на дробь: умножение на k — это то же самое, что деление иа $\frac{1}{k}$,

$$kx=\frac{x}{\frac{1}{k}}.$$

Значит, $\frac{1}{k}$ играет роль величины C из предыдущих формул.

Если, например, $k=\frac{1}{2}$, то $\frac{1}{k}=2$, т. е. $C=2$; значит, замена x_0 на $0,5x_1$ есть замена x_0 на $\frac{x_1}{2}$ и приводит к растяжению кривой по оси x в 2 раза.

Если $k=3$, то $\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$, т. е. $C=\frac{1}{3}$. Таким образом, замена x на $3x$, есть замена x на $\frac{x}{\frac{1}{3}}$. Что это значит геометрически?

До сих пор мы рассматривали только случай положительных и больших единицы значений C, $C>1$, и формулировали результат так: при замене $y\longrightarrow\frac{y}{C}$ в уравнении кривой кривая в C раз растягивается по высоте, при замене $x\longrightarrow\frac{x}{C}$ кривая в C раз растягивается в горизонтальном направлении.

Если C положительно, но меньше единицы, $0<C<1$, что соответствует $k>1$, то при замене $y\longrightarrow\frac{y}{C}$ вертикальные размеры изменяются в C раз; но так как $C<1$, то изменение в C раз теперь представляет собой сжатие; так, например, при $C=0,5$ изменение размера в C раз означает

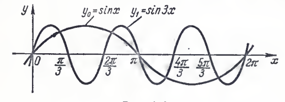


Рис. 116.

умножение высоты на 0,5, т. е. уменьшение ее вдвое. То же самое относится и к замене x на $\frac{x}{C}$: при $0<C<1$ такая замена приводит к сжатию кривой. Приведем еще один пример. На рис. 116 представлены две кривые

$$y_0=\sin x,\ \ y_1=\sin 3x.$$

У второй кривой горизонтальные размеры меньше в 3 раза.

Зависимость $y = \sin x$ — периодическая: при $x = 2\pi \approx 6,3$ (что соответствует углу 360° в градусном измерении) синус имеет такое же значение, как и при $x = 0$, добавление 2π к любому углу не меняет значения синуса. Функция $y = \sin 3x$ тоже периодическая, но у нее период меньше в 3 раза: достаточно, чтобы x изменилось на $\frac{2\pi}{3} \approx 2,1$ радиана, тогда $3x$ (тот угол, синус которого мы откладываем по оси ординат) меняется на 2π и $\sin 3x$ возвращается к тому же значению,

$$\sin 3x = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Продумайте на этом примере общее утверждение, что замена x на kx в уравнении кривой приводит к тому, что все горизонтальные размеры умножаются на $\frac{1}{k}$. В данном примере $k = 3$, горизонтальные размеры и, в частности, расстояние по оси x между точками, где $y = 0$, умножаются на $\frac{1}{3}$, т. е. уменьшаются в 3 раза.

Для периодической функции при замене x на kx в k раз уменьшается период, зато в k раз увеличивается частота, т. е. число периодов на единице длины.

Как ни просты, «арифметичны» эти соображения, начинающие (к которым адресована эта книга) в них часто ошибаются.

Рассмотрим, наконец, что будет при замене y на $\frac{y}{C}$ или x на $\frac{x}{C}$ при отрицательном C. Можно провести такую замену в два приема: напишем $C = -1 \cdot b$, где b положительно, и сделаем две замены

$$y_0 \to \frac{y_1}{b} \to \frac{y_2}{-1 \cdot b} = -\frac{y_2}{b}.$$

Первая операция — замена y_0 на $\frac{y_1}{b}$, где $b > 0$, — уже разбиралась, она приводит к изменению вертикальных размеров в b раз. Остается рассмотреть, к чему приводит изменение знака y, т. е. замена y на $-y$. Для отдельных точек

этот вопрос уже рассматривался в § 1. Приводим для кривых ответ без доказательства: изменение знака y приводит к отражению кривой в оси x, изменение знака x приводит к отражению в оси y.

Возьмем пример:

$$F(x,\ y) = (x-3)^2 + (y-5)^2 - 4 = 0.$$

Это уравнение окружности радиуса 2 с центром в точке с координатами $x = 3$, $y = 5$.

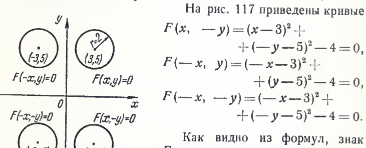


Рис. 117.

На рис. 117 приведены кривые

$$F(x,\ -y) = (x-3)^2 + (-y-5)^2 - 4 = 0,$$

$$F(-x,\ y) = (-x-3)^2 + (y-5)^2 - 4 = 0,$$

$$F(-x,\ -y) = (-x-3)^2 + (-y-5)^2 - 4 = 0.$$

Как видно из формул, знак F во всех случаях представляет собой одну и ту же функцию (проследите за этим внимательно, рассматривая первую часть формул). Проследите, что происходит с кривой (окружностью) при замене x на $-x$, y на $-y$ и одновременной замене $x \to -x$, $y \to -y$. Ясное понимание изложенных правил позволит Вам, построив и разобрав одну какую-то кривую,

$$y = f(x) \text{ или } F(x,\ y) = 0,$$

представить себе, как идут кривые для всех сходных функций

$$\frac{y-b}{c_2} = f\left(\frac{x-a}{c_1}\right) \quad \text{или} \quad F\left(\frac{x-a}{c_1},\ \frac{y-b}{c_2}\right) = 0$$

с любыми значениями четырех постоянных a, b, c_1, c_2.

Упражнения

1. Построить кривые $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$, $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9} - 1 = 0$, $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+5)^2}{4} - 1 = 0$, зная, что $x^2 + y^2 - 1 = 0$ представляет собой

уравнение окружности. При построении кривых рекомендуется на чертеже ставить центр, верхнюю и нижнюю точки, крайнюю правую и крайнюю левую точки, а затем соединять эти точки плавной кривой от руки.

2. Построить кривую $y=\sin x$ подробно, взяв, например, x от $-\pi$ до $+\pi$ с интервалом $0{,}25\pi$. Подразумевается, что x — угол выражен в радианной мере, поэтому удобно брать определенные доли π, так как тогда углы, выраженные в градусах, будут целыми: $0{,}25\pi=45°$; $0{,}5\pi=90°$ и т. д.

Можно воспользоваться таблицами в конце главы II, где дан синус в зависимости от угла, выраженного в радианной мере. По оси абсцисс во всех случаях откладывать x в радианах.

Построить кривые:

а) $y=2\sin x$;
б) $y=\sin 0{,}5x$;
в) $y=3\sin 3x$;
г) $y=\cos x$.

Указание. Воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

д) $y=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

е) $y=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Все эти кривые от а) до ж) построить, передвигая, растягивая или сжимая кривую $y=\sin x$.

3. Построить по точкам кривые:

а) $y=\pm\sqrt{x^2-1}$

или в симметричном виде $y^2-x^2+1=0$, задаваясь x от -5 до $+5$ с интервалом $0{,}5$. Если y получается мнимым, при соответствующих x кривой нет;

б) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2-1}$,

в) $y=\pm\sqrt{x^2+1}$.

Указание. Преобразовав к виду $x^2-y^2+1=0$, заметить, что в) получается из а) перестановкой x и y;

г) $4y^2+4y-x^2=0$.

Указание. Записать уравнение в виде

$$4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-x^2-1=0$$

и получить кривую, передвигая и сжимая кривую в).

§ 8. Параметрическое задание кривой

Пусть каждая из величин x и y задана как функция времени t, т. е. заданы две функции $x(t)$ и $y(t)$, например:

$$x=\cos t, \quad y=\sin t.$$

Эти зависимости можно изобразить графически в виде двух кривых, откладывая на одном чертеже по оси абсцисс t, а по оси ординат x, а на другом чертеже по оси абсцисс t, а по оси ординат y.

Но возможна и другая постановка вопроса: представим себе, что x и y — это координаты точки, каждому значению t отвечает определенное положение точки; спрашивается, какую кривую опишет точка в плоскости x, y при изменении t?

Для ответа на этот вопрос можно из двух уравнений, дающих $x=x(t)$ и $y=y(t)$, исключить величину t; тогда мы получим выражение, в которое будут входить только y и x, т. е. либо $y=y(x)$, либо $F(x, y)=0$. После этого будем строить кривую, как обычно, задаваясь различными x и находя соответствующие y.

Так, в приведенном примере найдем:

$$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1;$$

$$y=\pm\sqrt{1-x^2} \text{ или } x^2+y^2-1=0,$$

так что в плоскости x, y кривая представляет собой окружность.

Однако часто даже сравнительно простые выражения $x(t)$ и $y(t)$ приводят при попытке исключения t к таким сложным формулам, что нет смысла этим заниматься. Так, например, если

$$x=a_1t^4+b_1t^3+c_1t^2+d_1t+e_1,$$
$$y=a_2t^4+b_2t^3+c_2t^2+d_2t+e_2,$$

то для исключения t нужно решать уравнение четвертой степени, что приводит к очень громоздким выражениям.

Между тем построить кривую в плоскости x, y можно, не исключая t: достаточно задаваться различными значениями t, для каждого из них находить x и y. Приводим таблицу 6 для первого примера.

Таблица 6

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$x=\cos t$	1	0,7	0	—0,7	—1	—0,7	0	0,7	1
$y=\sin t$	0	0,7	1	0,7	0	—0,7	—1	—0,7	0

Очевидно, брать t больше 2π нет надобности, значения x и y будут повторяться. Теперь с помощью этой таблицы строим точки кривой. При этом мы пользуемся только значениями x и y. Те значения t, при которых эти x и y вычислены, при построении точек не используются. «Мавр сделал свое дело, мавр может уйти».

Такой способ задания кривой, или, что то же самое, функциональной зависимости $y(x)$, называется параметрическим, а величина t называется параметром.

Упражнения

1. Построить кривую, заданную уравнением

$$x=\cos t, \quad y=\sin 2t.$$

То же для

$$x=\cos t, \quad y=\sin 3t.$$

Указание. Так как $\sin 3t$ меняется быстро, нужно брать значения t достаточно часто, например: 0, 0,1; 0,2; ...

2. Задача-шутка: построить кривые

а) $x=\cos 3t, \quad y=\sin 3t$;

б) $x=\cos(5t+1), \quad y=\sin(5t+1)$.

3. Нешуточная задача: построить кривую

$$x=\cos t, \quad y=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right).$$

4. Построить кривую

$$x=\cos t, \quad y=\cos t.$$

5. Построить кривую, по которой движется точка A, лежащая на окружности диска радиусом 1 *см*, катящегося по оси x со скоростью 1 *см/сек*. В начальный момент центр круга Q лежит на оси y, а рассматриваемая точка A — в начале координат. Через время t координаты центра $Q_t(t, 1)$, круг повернулся на угол $-t$ радиан. Кривая называется циклоидой.

ГЛАВА V

ВЫТЕКАНИЕ ВОДЫ. РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД И ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

§ 1. Вытекание воды из сосуда. Постановка задачи

Рассмотрим вытекание воды из сосуда, в котором внизу имеется отверстие или тонкая трубка. В сосуд может также поступать вода из внешнего источника. Эта задача очень проста и наглядна по своей постановке. Вместе с тем те математические методы, которые нужны для описания вытекания воды, применяются и в более сложных и интересных задачах.

Представим себе сосуд, в который втекает (или из которого вытекает) вода. Объем воды, находящейся в сосуде, обозначим через V ($см^3$). Этот объем со временем меняется, т. е. V есть функция времени t ($сек$). Каков смысл величины $\frac{dV}{dt}$?

Ясно, что $dV = V(t+dt) - V(t)$ есть количество воды, поступившее в сосуд за время dt. Поэтому $\frac{dV}{dt}$ есть количество воды, поступившее в сосуд за единицу времени, т. е. скорость изменения количества воды в сосуде. Эта величина носит специальное название «поток воды». Будем обозначать поток через $q(t)$. Если $q > 0$, то вода поступает в сосуд, если же $q < 0$, то вода вытекает из сосуда, количество воды в сосуде уменьшается.

Если зависимость потока воды от времени известна, т. е. известна функция $q(t)$, то

$$\frac{dV}{dt} = q(t). \qquad (1.1)$$

В этом случае задача нахождения V подобна задаче определения пути по заданной скорости, и еще в главе I было выяснено, что такая задача решается интегрированием.

Для того чтобы задача имела вполне определенное решение, нужно, чтобы было задано количество воды V_0, которое находилось в сосуде в определенный начальный момент времени t_0. Условие, что $V = V_0$ при $t = t_0$ называется начальным условием.

Количество воды, которое втекло в сосуд за время от t_0 до t_1, есть $\int_{t_0}^{t_1} q(t)\,dt$. Отсюда количество воды в сосуде в момент t_1

$$V(t_1) = V_0 + \int_{t_0}^{t_1} q(t)\,dt. \tag{1.2}$$

Это выражение справедливо для любого момента времени t_1 и, следовательно, полностью определяет искомую зависимость V от t_1. Заметим, в частности, что при $t_1 = t_0$ интеграл в формуле (1.2) равен нулю и $V(t_0) = V_0$. Таким образом, решение (1.2) действительно удовлетворяет поставленному условию относительно количества воды в момент t_0 (начальному условию).

Отметим, что формулой (1.2) можно пользоваться и при $t_1 < t_0$. Однако смысл формулы (1.2) при $t_1 < t_0$ и $t_1 > t_0$ различный. При $t_1 > t_0$ величина $V(t_1)$ есть количество воды, которое будет в сосуде в момент t_1, если в момент t_0 в нем было количество воды V_0 и поток воды задан функцией $q(t)$. При $t_1 < t_0$ величина $V(t_1)$ есть то количество воды, которое должно находиться в сосуде в момент t_1 для того, чтобы в более позднее время, к моменту t_0, в нем было количество воды V_0 при потоке, заданном функцией $q(t)$.

Вместо обозначения t_1 можно писать просто t. Тогда формула (1.2) принимает вид

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} q(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Строго говоря, при этом буква t обозначает верхний предел интегрирования и таким образом «занята». Поэтому переменную интегрирования следовало бы обозначить какой-нибудь другой буквой, например τ, и писать (1.3) в виде

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau,$$

что совпадает с (1.2), если в (1.2) заменить t_1 на t и t на τ. Однако обычно этого не делают и пишут формулу в виде (1.3). При этом недоразумений не возникает. Надо только помнить, что в (1.3) $q(t)$ это не значение q на верхнем пределе, а функция переменной интегрирования, пробегающей все значения от t_0 до t.

Формулу (1.3), дающую решение задачи о вытекании воды, если задан поток $q(t)$ и количество воды в начальный момент $t = t_0$, можно получить при помощи несколько иных рассуждений. Из (1.1) в силу определения неопределенного интеграла следует, что

$$V(t) = \int q(t)\, dt.$$

Предположим, что неопределенный интеграл от функции $q(t)$ каким-либо образом найден. Обозначим его $I(t)$. Тогда

$$\int q(t)\, dt = I(t) + C,$$

где C — постоянная интегрирования. Отсюда

$$V(t) = I(t) + C. \tag{1.4}$$

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся начальным условием, т. е. потребуем, чтобы при $t = t_0$ было $V = V_0$. Подставляя в (1.4) $t = t_0$, получим:

$$V_0 = I(t_0) + C,$$

откуда

$$C = V_0 - I(t_0).$$

Подставляя значение C в (1.4), находим:

$$V(t) = V_0 + I(t) - I(t_0).$$

Это совпадает с формулой (1.3), так как

$$\int_{t_0}^{t} q(t) = I(t)\Big|_{t_0}^{t} = I(t) - I(t_0).$$

Формулу (1.4) можно назвать общим решением уравнения (1.1). Выбирая то или иное значение C, из формулы (1.4) можно получить различные частные решения, соответствующие различным начальным условиям.

Однако обычно поток как функция времени не известен. Чаще известен физический закон, характеризующий вытекание воды, который дает зависимость потока от напора воды, т. е. от высоты уровня воды z (рис. 118.)

Так, например, при вытекании воды через тонкую длинную трубку

$$q = -kz,$$

где коэффициент k — положительное постоянное число, знак минус означает, что вода вытекает. При вытекании воды из отверстия в тонкой стенке

$$q = -a\sqrt{z}.$$

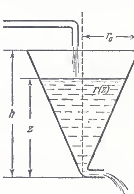


Рис. 118.

В каждом из этих случаев, пока не решена задача, не известна зависимость от времени уровня воды в сосуде $z(t)$, а значит, не известен и поток. Поэтому задачу определения V из уравнения

$$\frac{dV}{dt} = q(z) \tag{1.5}$$

нельзя свести к предыдущей задаче. Мы сформулировали здесь задачу в общем случае для произвольной зависимости потока q от уровня z.

В уравнение (1.5) входят две неизвестные величины: количество (объем) воды V и уровень воды z. Очевидно, эти величины не являются независимыми. Определенному уровню воды соответствует вполне определенное

количество воды, так что V есть известная функция*) от z, $V(z)$.

Подставляя $V(z)$ в уравнение (1.5), найдем:

$$\frac{dV(z)}{dt}=\frac{dV(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}=q(z).$$

Производная объема по высоте равна площади сечения на высоте z (см. формулу (14.8) главы I). Обозначим эту производную через $S(z)$

$$\frac{dV(z)}{dz}=S(z).$$

Окончательно получим уравнение

$$S(z)\frac{dz}{dt}=q(z). \tag{1.6}$$

Способ решения этого уравнения рассмотрен в следующем параграфе.

§ 2. Решение уравнения в случае, когда производная зависит от искомой функции

Задача о вытекании воды свелась к определению функции $z(t)$ из уравнения, в котором производная $\frac{dz}{dt}$ задана как функция z

$$S(z)\frac{dz}{dt}=q(z). \tag{1.6}$$

Перепишем уравнение (1.6) в виде $\frac{dz}{dt}=\frac{q(z)}{S(z)}$. Обозначим $\frac{q(z)}{S(z)}=f(z)$; тогда окончательно

$$\frac{dz}{dt}=f(z). \tag{2.1}$$

---

*) Вид этой функции определяется формой сосуда. Так, например, для цилиндрического сосуда $V=\pi r_0^2 z$. Для конического сосуда (см. рис. 118) $V=\frac{1}{3}S(z)z$, где S есть площадь сечения сосуда на высоте z, $S=\pi r^2(z)$, где $r(z)$ есть радиус сечения на уровне z. Из подобия треугольников найдем $r(z)=r_0\frac{z}{h}$, где r_0 — радиус верхнего основания конуса, h — полная высота, так что $V=\frac{1}{3}\frac{\pi r_0^2}{h^2}z^3$.

Уравнения, содержащие искомую функцию и ее производные, называются дифференциальными уравнениями. Если уравнение содержит лишь первую производную, то оно называется уравнением первого порядка. С простейшими дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dz}{dt} = f(t)$$

мы уже имели дело. Решить такое уравнение — значит найти функцию по ее производной. Эта задача решается интегрированием.

Рассмотрим уравнение (2.1). Перепишем его в виде

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{f(z)}. \tag{2.2}$$

Такая запись соответствует тому, что мы в ходе решения задачи временно будем рассматривать t как функцию z, т. е. будем искать обратную функцию $t(z)$ (см. главу II, § 2, в частности формулу (2.3)), а уже найдя ее, выразим z через t.

Проинтегрируем левую и правую части (2.2)

$$\int_{z_0}^{z} \frac{1}{f(z)}\, dz = \int_{t_0}^{t} dt,$$

откуда

$$t = t_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z)}. \tag{2.3}$$

Мы получили решение задачи: справа стоит функция от z, слева — время t. Такое равенство позволяет при каждом значении t найти соответствующее z. Решение (2.3) удовлетворяет начальному условию: $z = z_0$ при $t = t_0$ (в начальный момент $t = t_0$ задан уровень воды в сосуде z_0).

В заключение этого параграфа рассмотрим два примера.

1. Вода вытекает из конического сосуда по тонкой трубке:

$$q=-kz, \quad V=\frac{1}{3}\pi\frac{r_0^2}{h^2}z^3,$$

$$\frac{dV}{dz}=S(z)=\frac{\pi r_0^2}{h^2}z^2, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{q(z)}{S(z)}=-\frac{kzh^2}{\pi r_0^2 z^2}=-\frac{kh^2}{\pi r_0^2}\frac{1}{z},$$

$$-\frac{\pi r_0^2}{kh^2}z\,dz=dt, \quad -\frac{\pi r_0^2}{kh^2}\int\limits_{z_0}^{z}z\,dz=-\frac{\pi r_0^2}{kh^2}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z_0^2}{2}\right)=t-t_0.$$

В этом примере не представляет труда выразить z как функцию t

$$\frac{z^2}{2}=\frac{z_0^2}{2}-\frac{kh^2}{\pi r_0^2}(t-t_0),$$

$$z=\sqrt{z_0^2-\frac{2kh^2}{\pi r_0^2}(t-t_0)}. \qquad (2.4)$$

Эта формула полностью решает задачу. Легко проверить, что

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{kh^2}{\pi r_0^2}\frac{1}{\sqrt{z_0^2-\frac{2kh^2}{\pi r_0^2}(t-t_0)}}=-\frac{kh^2}{\pi r_0^2 z},$$

так что z действительно удовлетворяет уравнению. Очевидно также, что при $t=t_0$ $z=z_0$. Выражение (2.4) позволяет найти момент, когда закончится опорожнение сосуда: $z=0$ при $t=t_0+\frac{\pi r_0^2}{kh^2}\frac{z_0^2}{2}$.

2. Цилиндрический сосуд с трубкой. В этом случае

$$V(z)=\pi r_0^2 z, \quad \frac{dV}{dt}=\pi r_0^2\frac{dz}{dt}=-kz.$$

Отсюда

$$-\pi r_0^2\frac{dz}{z}=kdt,$$

$$-\pi r_0^2(\ln z-\ln z_0)=-\pi r_0^2\ln\frac{z}{z_0}\;\pi r_0^2\ln\frac{z_0}{z}=k(t-t_0). \qquad (2.5)$$

Из (2.5) нетрудно выразить z через t. Действительно, $\ln z = \ln z_0 - \frac{k}{\pi r_0^2}(t - t_0)$. Отсюда

$$z = z_0 e^{-\frac{k}{\pi r_0^2}(t-t_0)}.$$

Рассмотрим два момента времени t и $t + \Delta t$ и найдем отношение $\frac{z(t+\Delta t)}{z(t)}$

$$\frac{z(t+\Delta t)}{z(t)} = e^{-\frac{k}{\pi r_0^2}(t+\Delta t - t_0 - t + t_0)} = e^{-\frac{k\Delta t}{\pi r_0^2}}.$$

Мы видим, что это отношение зависит только от Δt и не зависит от t. Поэтому за равные промежутки времени уровень воды z падает в равном отношении.

Интересное качественное отличие второго примера от первого заключается в том, что во втором решении нет такого момента, когда z обращалось бы точно в нуль. С течением времени z уменьшается, но к нулю стремится только при $t \to \infty$.

§ 3. Радиоактивный распад

Основной закон радиоактивного распада состоит в том, что отношение числа распавшихся за единицу времени атомов к общему числу атомов является постоянной величиной, зависящей только от вида атомов. При этом подразумевается, что общее число атомов весьма велико.

Указанное отношение называется вероятностью распада. Обозначим количество атомов, которые еще не распались к моменту времени t, через $N(t)$. В момент времени $t + dt$ нераспавшихся атомов будет $N(t + dt)$. Поэтому за время dt (от t до $t + dt$) распадается $N(t) - N(t + dt) = -dN$ атомов. Вероятность распада $\omega = \frac{dN}{Ndt}$. Отсюда

$$\frac{dN}{dt} = -\omega N. \qquad (3.1)$$

Из этого соотношения, вспоминая, что размерность $\frac{dN}{dt}$

такая же, что и отношения $\frac{N}{t}$, видим, что вероятность распада ω имеет размерность $\frac{1}{сек}$ *).

Начальное условие состоит в задании числа атомов в начальный момент времени: $N = N_0$ при $t = t_0$.

Решая уравнение (3.1) способом, изложенным в предыдущем параграфе, и пользуясь начальным условием, находим:

$$N(t) = N_0 e^{-\omega t} \tag{3.2}$$

(советуем читателю проделать все выкладки). Однако в случае, когда производная пропорциональна искомой функции, можно предложить более простой способ решения уравнения.

В главе II мы выяснили, что производная от показательной функции пропорциональна самой функции

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \text{const} \cdot a^x,$$

в частности,

$$\frac{d(Ce^{kx})}{dx} = Cke^{kx},$$

если C и k — постоянные. Вспомнив это свойство показательной функции, предположим, что решение уравнения (3.1) имеет вид

$$N = Ce^{kt}, \tag{3.3}$$

и постараемся подобрать C и k так, чтобы удовлетворялись уравнение и начальное условие. Дифференцируя (3.3), получим:

$$\frac{dN}{dt} = Cke^{kt} = kN;$$

подставим это в (3.1): $kN = -\omega N$, откуда $k = -\omega$. Полагая в (3.3) $t = 0$ и пользуясь начальным условием, получаем $C = N_0$. Итак, $N = N_0 e^{-\omega t}$.

*) Следовательно, вероятность здесь понимается не в том смысле, как в утверждении, что при бросании монеты вероятность того, что монета упадет вверх гербом, равна половине. Определение вероятности распада как отношения числа распадов в единицу времени к начальному числу атомов справедливо только в том случае, если число распадов в единицу времени (например, секунду) составляет малую долю числа атомов. Точное определение вероятности распада дается именно формулой $\omega = -\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, т. е. вероятность распада равна отношению числа распадов за малый промежуток времени к общему числу атомов и к величине промежутка времени.

Величина $-\omega t$, стоящая в показателе степени, безразмерна, как и должно быть.

Радиоактивные атомы характеризуются периодом полураспада T, который представляет собой время, в течение которого число атомов N вследствие распада уменьшается вдвое по сравнению с начальным.

Определим период полураспада T. Из формулы (3.2) $N(T) = N_0 e^{-\omega T}$. С другой стороны, по определению $N(T) = \frac{1}{2} N_0$. Поэтому $N_0 e^{-\omega T} = \frac{1}{2} N_0$; $e^{-\omega T} = \frac{1}{2}$, откуда

$$-\omega T = -\ln 2, \quad T = \frac{\ln 2}{\omega} \approx \frac{0{,}69}{\omega}. \tag{3.4}$$

Период полураспада обратно пропорционален вероятности распада.

Каждый атом, прежде чем распасться, существует некоторое время, это время называется временем жизни атома.

Найдем среднее время жизни $\overline{t}$ атома данного радиоактивного элемента. Пусть в начальный момент $t = 0$, когда атомы были изготовлены, было N_0 атомов. За время от t до $t + dt$ распадается количество атомов

$$-dN = \omega N\,dt.$$

Все атомы этой группы прожили примерно поровну, их время жизни есть t. Среди взятых в начальный момент атомов имеются группы атомов, которым предстоит прожить различное время от общего для всех атомов момента изготовления до различного для разных атомов момента распада. Чтобы найти среднее время жизни, надо умножить время жизни каждой группы на число атомов в этой группе, сложить эти величины для всех групп и поделить на общее число атомов во всех группах.

Так как будет складываться весьма большое количество слагаемых, то вместо суммы появится интеграл, поэтому

$$\overline{t} = \frac{\int\limits_0^\infty t\cdot\omega N\,dt}{\int\limits_0^\infty \omega N\,dt}. \tag{3.5}$$

Подставим сюда выражение для N из (3.2). Знаменатель

$$\int_0^\infty \omega N\,dt = \int_0^\infty \omega N_0 e^{-\omega t}dt = \omega N_0 \int_0^\infty e^{-\omega t}dt = -\omega N_0 \frac{e^{-\omega t}}{\omega}\Big|_0^\infty = N_0,$$

чего и следовало ожидать, так как интеграл в знаменателе дает общее число всех распавшихся атомов, которое, очевидно, равно числу атомов в начальный момент времени.

Интеграл, стоящий в числителе (3.5), берем интегрированием по частям, полагая $t = f$, $e^{-\omega t}dt = dg$. Получаем:

$$\omega N_0 \int_0^\infty t e^{-\omega t}dt = \omega N_0 \left[-\frac{1}{\omega} t e^{-\omega t} + \int \frac{1}{\omega} e^{-\omega t}dt\right]_0^\infty =$$

$$= \omega N_0 \left[-\frac{1}{\omega} t e^{-\omega t} - \frac{1}{\omega^2} e^{-\omega t}\right]_0^\infty = \frac{N_0}{\omega}.$$

Из формулы (3.5) получим теперь

$$\bar{t} = \frac{N_0}{\omega N_0} = \frac{1}{\omega}. \tag{3.6}$$

Пользуясь этим, можно основное уравнение (3.1) и его решение (3.2) записать так:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\bar{t}}, \tag{3.7}$$

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\bar{t}}}. \tag{3.8}$$

При этом надо помнить, что время t есть независимая переменная, число атомов зависит от t. Величина же $\bar{t}$ есть постоянная, характеризующая данный тип радиоактивных атомов.

Из формулы (3.8) видно, что за время $t = \bar{t}$ число атомов уменьшается от N_0 до $N_0 e^{-1} = \frac{N_0}{e}$, в e раз, т. е. приблизительно в 2,72 раза.

По формуле (3.7) начальная скорость распада такова, что если бы число атомов, распадающихся за единицу времени, не уменьшалось, то все атомы распались бы за время $\bar{t}$. Действительно, при $t = 0$ было N_0 атомов и скорость

распада $\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{N_0}{\bar{t}}$. При такой скорости для полиого распада иужио время, равиое $\bar{t}$. Из формулы (3.4) $\omega=\frac{\ln 2}{T}$, поэтому

$$\bar{t}=\frac{T}{\ln 2}\approx 1{,}45\,T.$$

Величиной $\bar{t}$ в расчетах пользоваться удобнее, чем периодом полураспада T.

Упражнения

1. Средиее время жизни радия 2400 лет. Определить период полураспада радия.
2. Виачале было 200 *г* радия. Сколько его остается через 300 лет?
3. За 500 лет распалось 10 *г* радия. Сколько его было в начальиый момеит?
4. Определить, через сколько времеии распадается 1%, 10%, 90%, 99% от первоиачальиого запаса радия.
5. Содержаиие радия иа Земле в различных породах в средием около $\frac{1}{10^{12}}$ (по атомам). Каково было содержаиие радия 10 000 лет иазад, 10^6 лет иазад, $5\cdot 10^9$ лет иазад ($5\cdot 10^9$ лет — возраст Земли)?

§ 4. Измерение среднего времени жизни радиоактивных атомов

Среднее время жизни $\bar{t}$ различных радиоактивиых атомов весьма различно. Так, например, известио несколько изотопов урана. Один из них, уран с атомным весом 238 (U^{238}), имеет среднее время жизни $\bar{t}=7\cdot 10^9$ лет. Другой изотоп (U^{235}) имеет среднее время жизни $\bar{t}=10^9$ лет (получение атомной энергии на атомных электростанциях при делении ураиа происходит в осиовном за счет U^{235}). Средиее время жизни радия 2400 лет *).

Однако не надо думать, что среднее время жизни всех радиоактивиых атомов исчисляется тысячелетиями. Среди

*) Отметим, что в физических справочииках часто приводят период полураспада $T=0{,}69\,\bar{t}$, см. § 3.

радиоактивных веществ, встречающихся в природе и изученных еще супругами Кюри и Эрнестом Резерфордом, имеется полоний со средним временем жизни около 200 дней, радий A со средним временем жизни 4 минуты и радий C' со средним временем жизни $2\cdot10^{-4}$ секунды.

В последние 30 лет в связи с развитием ядерной физики и использованием атомной энергии открыто огромное количество (более 400) различных радиоактивных веществ с самым различным средним временем жизни.

Если в момент времени t имеется $N(t)$ нераспавшихся атомов, то в единицу времени распадается $n(t)=\omega N(t)$ атомов. Величина $n(t)$ есть скорость распада атомов.

Умножим обе части равенства (3.2) на ω. Получим:

$$\omega N=\omega N_0 e^{-\omega t}$$

или

$$n(t)=n_0(t)e^{-\omega t}, \tag{4.1}$$

где $n_0(t)$ — скорость распада в начальный момент времени.

Если элемент имеет большое среднее время жизни, то проверить формулу (3.2) на опыте не удается. Пусть взят уран-238. Современная техника измерений позволяет обнаружить каждый случай распада радиоактивного атома. Оказывается, что в одном грамме U^{238} каждую секунду происходит $1,2\cdot10^4$ распадов. Один грамм U^{238} содержит $2,5\cdot10^{21}$ атомов. Поэтому

$$\omega=\frac{1,2\cdot10^4}{2,5\cdot10^{21}}=5\cdot10^{-18}\,\frac{1}{сек}.$$

Пользуясь (3.6), находим $\bar{t}=\frac{2,5\cdot10^{21}}{1,2\cdot10^4}=2\cdot10^{17}$ $сек=7\cdot10^9$ лет. Пусть мы наблюдаем за распадом урана 10 лет. За это время в одном грамме распадается около $4\cdot10^{12}$ атомов. Обнаружить, что вместо $2,5\cdot10^{21}$ атомов осталось $(2,5\cdot10^{21}-4\cdot10^{12})$, было бы очень трудно.

Однако, проводя опыты с радиоактивными веществами, имеющими не очень большое среднее время жизни (от нескольких минут до нескольких дней), удается с большой точностью проверить формулу (4.1), а тем самым подтвердить формулы (3.1) и (3.2). Для этого можно поступить следующим образом. Будем подсчитывать число распадов за небольшие промежутки времени. Поделив число

распадов на длину промежутка времени, получим скорость распада в различные моменты времени.

Построим график зависимости скорости распада от времени. Получим кривую линию. Как убедиться в том, что эта кривая есть график показательной функции? Для этого подсчитаем логарифмы полученных значений скорости распада и по этим данным построим график зависимости величины $\ln n$ от времени t. В результате должна получиться прямая линия, а это нетрудно проверить на глаз. Многочисленные эксперименты действительно дают прямую.

Таким образом, $\ln n(t)$ есть линейная функция от времени, т. е.

$$\ln n(t) = a + bt. \tag{4.2}$$

А это значит, что $n(t) = e^{a+bt} = e^a e^{bt} = ce^{bt}$. На графиках величина b получается отрицательной: $b = -\omega$, где ω — вероятность распада. Следовательно, опыт подтверждает основной результат предыдущего параграфа и дает возможность определить ω, подсчитав тангенс угла наклона прямой (4.2) к оси t.

Надо подчеркнуть, что этот результат, по существу, чрезвычайно удивителен *). Представим себе N_0 радиоактивных атомов, приготовленных одновременно в начальный момент $t = 0$. Все они приготовлены одинаковым способом и одновременно. Мы знаем, что радиоактивные атомы неустойчивы, способны распадаться. Можно допустить, что распад атомов требует определенного времени. Представим себе, что после приготовления атомы должны как-то созреть до распада. Но в таком случае мы должны были бы ожидать, что все атомы будут, не распадаясь, созревать одно и то же время, а по истечении этого времени, созрев, одновременно распадутся. Представим себе какие-то модели пушек с натянутыми пружинами и зубчатыми колесами (или часовыми механизмами), способные при определенном положении зубчатых колес (или часовых механизмов)

*) Нильс Бор в докладе о радиоактивных превращениях (1905 г.) говорит в этой связи: «Смысл дискуссий о средней продолжительности жизни атомов без указания на определенный момент времени состоит в том, что они, так сказать, не стареют до тех пор, пока не начнут распадаться; следовательно, одинаковая возможность распада существует в любой момент их жизни».

силой пружины выбрасывать снаряд. Выстреливание снаряда будем называть распадом модели. При одинаковом устройстве всех моделей модели, изготовленные в одно и то же время, выбрасывают снаряд по истечении одинакового срока.

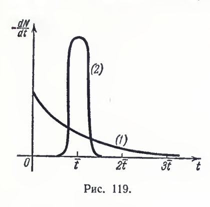


Рис. 119.

Такая картина распада модели пушки с вылетом снаряда не имеет ничего общего с действительным поведением радиоактивного атома. Приготовленные в одно и то же время атомы распадаются в самые разнообразные моменты. Подсчитаем, например, сколько процентов распадается за время, меньшее среднего времени жизни. Из (3.2) находим, что скорость распада (количество атомов, распавшихся в единицу времени) есть $\frac{dN}{dt} = -\omega N_0 e^{-\omega t}$. За время dt распадается

$$\frac{dN}{dt} \cdot dt = dN = -\omega N_0 e^{-\omega t}\, dt \text{ атомов,}$$

а за время от $t=0$ до $t=\bar{t}$ распадается

$$M = -\int_0^{\bar{t}} \omega N_0 e^{-\omega t}\, dt = -N_0 e^{-\omega t}\Big|_0^{\bar{t}} = N_0 (1 - e^{-\omega \bar{t}}) \text{ атомов.}$$

Так как $\omega = \frac{1}{\bar{t}}$, то

$$M = N_0 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0{,}63 N_0.$$

Значит, за время меньше чем $\bar{t}$ распадается 63% атомов. Аналогично подсчитываем, что за время от $\bar{t}$ до $2\bar{t}$ распадается 23% атомов, а за время больше $2\bar{t}$ — 14% атомов.

На рис. 119 показаны рядом кривые числа распадов в единицу времени для радиоактивных атомов (*1*) и для моделей пушек (*2*). При этом кривая для моделей имеет

ширину. Можно представить себе, что модели изготовлены не совсем точно и поэтому стреляют не совсем одновременно. Чем точнее выполнены модели, тем уже кривая на рис. 119.

Площадь под кривой представляет собой общее число всех распавшихся атомов для одной кривой и общее число всех моделей для второй кривой. Можно взять число моделей, равное числу атомов. Тогда обе кривые будут иметь одинаковую площадь.

Абсцисса центра тяжести обеих кривых также одинакова *); это значит, что рассматриваются такие модели, у которых среднее время жизни (до выстрела) такое же, как среднее время жизни рассматриваемых радиоактивных атомов.

Таким образом, мы сделали все, что было в наших силах, чтобы добиться сходства кривых: взяли столько моделей и с таким механизмом, чтобы общее число моделей и атомов и среднее время жизни моделей и атомов были одинаковы. И тем не менее получились кривые, необычайно резко отличающиеся по форме! Эксперимент с радиоактивными ядрами с абсолютной неопровержимостью отбрасывает тот тип кривой, который получается для моделей. Чем точнее ставятся опыты, тем с большей точностью подтверждается именно закон (3.2).

Сравнение с моделями нам понадобилось для того, чтобы не принимать как должную и естественную зависимость (3.2) для радиоактивного распада, чтобы вызвать чувство удивления и любопытства, вызвать вопрос: «А почему же, в самом деле, радиоактивный распад идет таким образом?»

Каков физический смысл величины вероятности распада? В далеком прошлом, в начале века, иногда высказывались предположения, что радиоактивный распад требует еще какого-то внешнего воздействия, например попадания извне какой-то частицы. В этом случае можно было бы себе представить, что один атом распался раньше, а другой позже в зависимости от того, в который атом раньше попала частица. Но эта гипотеза не соответствует фактам, радиоактивный распад идет с одинаковой скоростью в самых различных условиях,

*) Как будет показано в § 15 главы VI, это следует из формулы (3.5).

не зависит от температуры и столкновений атомов между собой, не зависит от действия космических лучей; при радиоактивном распаде в точности сохраняется энергия, что также опровергает представление о каком-нибудь внешнем воздействии при распаде.

Вторая возможная гипотеза заключается в предположении, что в действительности в начальный момент приготовления радиоактивных атомов они уже были не совсем одинаковы и именно поэтому распались в различное время. Это предположение соответствует картине моделей, которые выпускаются с часовыми механизмами, установленными на различное время. Эта гипотеза предполагает, что точное знание состояния каждого атома полностью определяет всю его дальнейшую историю и, в частности, точно определяет, когда именно распадается данный атом. Если атомы распадаются через разное время после их приготовления, значит, так каждому из них и было на роду написано: при изготовлении разные атомы одного и того же радиоактивного вещества были изготовлены неодинаковыми и это разное время было предопределено при изготовлении.

Такая точка зрения также не выдерживает критики. С этой точки зрения при каждом конкретном способе получения атомов радиоактивного элемента должна получаться своя зависимость скорости распада от времени. Опыт опровергает такое предположение.

Один и тот же вид радиоактивных атомов часто можно получить различными способами: например, атомы Mo^{99} (молибден с атомным весом 99) получаются в атомных котлах при делении урана. Такие же атомы раньше были получены при действии ядер тяжелого водорода (дейтерия) на атомы обычного, встречающегося в природе, нерадиоактивного молибдена. В настоящее время известно множество таких примеров, в которых один и тот же вид радиоактивных атомов получается различными способами. Опыт показывает, что независимо от способа получения атомов всегда скорость распада дается формулой (3.2) с постоянным значением ω, характеризующим данный вид атомов. Следовательно, опыт доказывает именно основное уравнение

$$\frac{dN}{dt} = -\omega N.$$

В этом уравнении заключено очень большое содержание: все радиоактивные атомы в точности одинаковы. Вероятность распада не зависит от того, как и когда они были получены. Свежеполученные 100 атомов распадаются совершенно так же, как в том случае, если приготовить 10^6 атомов, выждать время, нужное для того, чтобы уцелели 100 атомов, и рассмотреть эти 100 уцелевших атомов *).

Что же удивительного в том, что 100 атомов с данным атомным весом и числом электронов всегда одинаковы? Если бы это были нерадиоактивные атомы, то и, в самом деле, удивляться было бы нечему. Но для радиоактивных атомов этому надо удивляться, вспоминая, что из 100 атомов 63 распадается за время $\bar{t}$, а остальные 37 — после $\bar{t}$, т. е. надо удивляться тому, что у атомов время распада различно, хотя атомы одинаковы.

Это удивление небесплодно. В явлении радиоактивного распада уже проявляются особенности законов движения атомных и ядерных частиц, отличающиеся от законов движения тел, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни. Эти особенности изучаются в квантовой механике. Понятно, что в этой книге мы не будем ее касаться. Нашей целью является более скромная задача: показать, что постановка вопроса о необходимости выработки новых представлений, отличающихся от обычной механики, следует из очень простых, известных школьнику фактов о радиоактивности. Чтобы понять, что старых представлений не достаточно, надо только суметь задуматься, суметь удивиться.

В автобиографии Альберт Эйнштейн — величайший физик XX века — подчеркивает свое удивление, ощущение чуда, которое он испытал, когда впервые увидел компас, увидел

---

*) Характерной особенностью показательной функции является именно тот факт, что часть кривой подобна всей кривой. Действительно, пусть $N=N_0e^{-\omega t}$. В момент $t=t_1$ $N=N_1=N_0e^{-\omega t_1}$. Начнем новый отсчет времени с момента t_1, время, отсчитанное с этого момента, обозначим τ, $\tau=t-t_1$, $t=t_1+\tau$. Тогда $N=N_0e^{-\omega t}=N_0e^{-\omega(t_1+\tau)}=N_0e^{-\omega t_1}e^{-\omega\tau}=N_1e^{-\omega\tau}$. Рассматриваем распад N_0 частиц, приготовленных в момент $t=0$. Интересуемся той частью процесса, которая протекает после $t=t_1$. Для этой части процесса получаем $N=N_0e^{-\omega t_1}\cdot e^{-\omega\tau}=N_1e^{-\omega\tau}$, где τ — время, отсчитанное от t_1. Таким образом, закон распада оставшихся от предыдущего распада частиц в числе $N_1=N_0e^{-\omega t_1}$ совершенно такой же, как закон распада свежеполученных N_1 частиц. Именно это утверждение и сделано в тексте.

таинственное действие магнитной силы, проникающей через бумагу, дерево, землю и воздействующей на стрелку компаса без прямого соприкосновения. Он пишет о том, что такое удивление является сильнейшим побудительным мотивом для исследования. Он пишет о любознательности, «которую современные методы обучения почти совсем удушили». Сам Эйнштейн показал исключительную способность удивляться и черпать вдохновение и побуждение к созданию теорий из самых общеизвестных фактов. Так, в основе гениальной общей теории относительности лежит удивление перед фактом падения различных тел с одинаковым ускорением.

Понятно, что одного удивления, одной постановки вопроса не достаточно, и Эйнштейн соединил способность ставить вопрос с умением решить его, с владением всей нужной математической техникой. И все же среди многих замечательных ученых именно умение удивиться и поставить вопрос там, где другие не видели ничего замечательного,— вот что сделало Эйнштейна наиболее выдающимся физиком XX века.

Может быть, рассмотренный выше разбор радиоактивного распада послужит читателю примером того, какие глубины можно увидеть за простыми фактами и формулами.

В заключение приведем в качестве примера кривые радиоактивного распада, полученные экспериментально в 1955 г. в работе Сиборга и его сотрудников (США), в которой впервые был наблюден 101-й элемент периодической системы, названный авторами *менделевием* (химический символ Md) в честь великого русского химика Д. И. Менделеева.

В этой работе 98-й элемент, *калифорний*, с атомным весом 252, облучался нейтронами в котле; при этом образовывался калифорний-253. Калифорний-253 испускает электрон и превращается в 99-й элемент — эйнштейний, En, с тем же атомным весом 253.

Около 10^9 атомов эйнштейния (т. е. $4\cdot10^{-13}$ *г*) осадили на золотую пластинку и подвергли в циклотроне бомбардировке α-частицами, т. е. ядрами гелия. При этом образуется элемент с номером 100 — фермий, Fm, по реакции

$$\mathrm{En}_{99}^{253}+\mathrm{He}_2^4=\mathrm{Fm}_{100}^{256}+p_1^1$$

и менделевий по реакции

$$\mathrm{En}_{99}^{253}+\mathrm{He}_2^4=\mathrm{Md}_{101}^{256}+n_0^1.$$

В этой записи у каждого химического символа внизу поставлен номер в периодической системе Менделеева, т. е. число протонов в ядре. Число справа сверху указывает атомный вес, округленный до целого числа, т. е. сумму числа нейтронов и протонов в ядре. He_2^4 — это ядро гелия, т. е. α-частица, p_1^1 — ядро атома водорода — протон, n_0^1 — нейтрон. При ядерной реакции сумма нижних чисел слева и справа одинакова, а также одинакова и сумма верхних чисел, так как при ядерных реакциях происходит только обмен нейтронами и протонами между ядрами. После бомбардировки α-частицами золотая пластинка вместе с образовавшимися фермием и менделевием растворялась в кислоте, и фермий и менделевий выделялись химически. Именно периодический закон Менделеева, как пишет Сиборг, позволяет предвидеть заранее химические свойства элемента, никогда ранее в природе не существовавшего, никогда ранее не исследованного. После химического разделения производились измерения радиоактивного распада. Фермий с атомным весом 256 радиоактивно распадается с периодом полураспада около 3,5 часа. Он распадается на два ядра-осколка примерно равной массы, т. е. самопроизвольно делится (о делении см. ниже, § 5).

Верхняя кривая на рис. 120 показывает зависимость числа ядер фермия от времени в опыте. По оси абсцисс отложено время в минутах. По оси ординат отложено число атомов, имеющихся на данный момент *). Ось ординат имеет неравномерную шкалу: высота пропорциональна логарифму числа атомов. В частности, ось абсцисс ($y = 0$) соответствует одному уцелевшему атому ($\ln 1 = 0$), а числу атомов, равному нулю, соответствует $-\infty$ на оси ординат. Распад каждого отдельного атома меняет число атомов на 1, в промежутке между двумя распадами число атомов постоянно. Поэтому при такой экспериментальной технике, когда регистрируется каждый отдельный распад, вместо плавной кривой получается ломаная ступенчатая линия, на которой каждому распаду соответствует вертикальная линия, соединяющая две ступеньки.

---

*) Число атомов, имеющихся в данный момент, непосредственно в этот момент подсчитать не удается. На опыте регистрируются распады атомов. Число атомов N в момент t подсчитывается по окончании опыта, когда все N атомов уже распались.

Прямая линия, проведенная на рис. 120, соответствует закону распада

$$n = n_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = \frac{T}{\ln 2} \approx 5$ часов, $T \approx 3{,}5$ часа. Как видно из рис. 120, всего в опыте зарегистрировано 40 распадов фермия. Чем больше атомов, тем ближе ломаная к прямой; когда же остается меньше пяти атомов, то естественно, что вероятностный характер радиоактивного распада приводит к значительным отклонениям от показательного закона, справедливого для большого числа атомов.

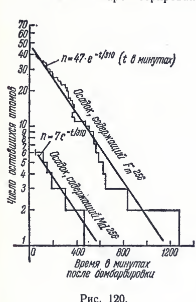


Рис. 120.

Ядра менделевия после химического разделения быстро (за полчаса) захватывают атомный электрон и превращаются при этом в ядра фермия. Поэтому тот осадок, в котором оказался менделевий, при измерении его радиоактивности также дает распад атомов на два осколка с периодом полураспада 3,5 часа. Кривая распада фермия, получившегося из менделевия, находится в левом нижнем углу рис. 120. В опыте наблюдено шесть распадов. Специальными опытами доказано, что эти шесть атомов не могли попасть в измеряемый осадок в качестве загрязнения фермием, а именно образовались из менделевия.

Всего в нескольких опытах Сиборг и его сотрудники наблюдали 17 атомов менделевия.

Приведенный выше пример не очень хорош для иллюстрации точности выполнения показательного закона при радиоактивном распаде. Опыты, доказывающие показатель-

ный закон, успешно ставились с более распространенными радиоактивными веществами. Зато пример менделевия и фермия показывает замечательное экспериментальное искусство современных физиков, синтезирующих новые элементы и регистрирующих распад каждого отдельного атома.

В опытах Сиборга счетчик распадов менделевия был включен через усилитель в радиотрансляционную сеть института, и при каждом распаде все сотрудники института, работающие в разных лабораториях, на разных этажах, оповещались об успехе — о рождении (точнее, о зарегистрированной смерти) каждого атома нового элемента, созданного человеком (впрочем, еще раньше, чем была закончена работа, вмешалась пожарная охрана и оповещение было прекращено).

§ 5. Последовательный распад (радиоактивиое семейство)

В ряде случаев радиоактивный распад приводит к образованию атомов, которые также радиоактивны, так что осуществляется цепочка распадов: атом вещества A превращается в атом вещества B, атом вещества B в свою очередь превращается в атом вещества C и т. д. Рассмотрим математическую задачу об определении зависимости от времени количества веществ A, B, C и способы ее решения. Количество атомов веществ A, B, C, не распавшихся к моменту времени t, будем обозначать теми же буквами A, B, C.

Пусть вероятности распада вещества A, B, C равны соответственно ω, v, u. Тогда

$$\frac{dA}{dt} = -\omega A \tag{5.1}$$

(A иазывают материнским веществом). Напишем уравнеиие для вещества B. За единицу времени распадается vB атомов вещества B. С другой стороны, за это же время происходит ωA распадов вещества A, а так как при каждом распаде атома вещества A образуется атом вещества B, то за единицу времени образуется ωA атомов вещества B. Поэтому

$$\frac{dB}{dt} = -vB + \omega A. \tag{5.2}$$

Аналогичные рассуждения дают:

$$\frac{dC}{dt} = -uC + vB. \tag{5.3}$$

Уравнения (5.1)—(5.3) образуют систему дифференциальных уравнений. В данном случае эти уравнения можно решать одно за другим, имея каждый раз дело только с одним уравнением и одним неизвестным. Действительно, в уравнение (5.1) B и C не входят. Поэтому из него определяем $A(t) = A_0 e^{-\omega t}$; здесь A_0 — количество атомов вещества A в начальный момент $t = 0$.

Подставляя выражение для $A(t)$ в уравнение (5.2), получим уравнение, содержащее только одну неизвестную функцию B,

$$\frac{dB}{dt} = -vB + \omega A(t). \tag{5.4}$$

Как решить такое уравнение? Решение такого уравнения можно найти, если рассмотреть сперва судьбу группы атомов вещества B, образовавшихся в один и тот же промежуток времени — от τ до $\tau + \Delta\tau$. Будем рассматривать число атомов этой группы ΔB, оставшихся «в живых», т. е. не распавшихся к моменту t, в зависимости от времени t. Для того чтобы не смешать между собой момент t, когда мы измеряем число атомов, и момент образования группы, обозначаем эти моменты разными буквами: t и τ соответственно. В момент τ скорость образования атомов вещества B была $\omega A(\tau)$. За малый промежуток времени $\Delta\tau$ образовалось $\Delta B_0 = \omega A(\tau)\Delta\tau$ атомов вещества B.

Как зависит число атомов в интересующей нас группе от времени t? При $t < \tau$ оно равно нулю: интересующие нас атомы еще не образовались, так как не образовалась еще сама группа, $\Delta B = 0$. Пусть $t > \tau$. Заметим, что с момента образования группы уже прошло время $t - \tau$. Вероятность распада вещества B есть v. Поэтому по истечении времени $t - \tau$ с момента образования группы число нераспавшихся атомов будет:

$$\Delta B(\tau) = \Delta B_0 e^{-v(t-\tau)} = \omega A(\tau) e^{-v(t-\tau)} \Delta\tau.$$

Для того чтобы найти полное число атомов вещества B в момент времени t, надо сложить число атомов во всех

группах, образовавшихся до момента t. Если брать $\Delta\tau$ (а значит, и ΔB) весьма малыми, то сумма превратится в интеграл

$$B(t) = \int_0^t \frac{\Delta B(\tau)}{\Delta\tau}\, d\tau = \int_0^t \omega A(\tau)\, e^{-v(t-\tau)}\, d\tau.$$

Отметим, что переменная интегрирования обозначена здесь через τ. Аргумент t, от которого зависит B, входит в интеграл в двух местах: как верхний предел и в выражении подынтегральной функции. При интегрировании по τ величину t следует рассматривать как постоянную. Поэтому можно записать

$$e^{-v(t-\tau)} = e^{-vt} e^{v\tau}$$

и вынести ωe^{-vt} из-под интеграла как множитель, не зависящий от τ. Сделав это, получим

$$B(t) = \omega e^{-vt} \int_0^t A(\tau)\, e^{v\tau}\, d\tau. \qquad (5.5)$$

Легко проверить, не вычисляя интеграла, что решение (5.5) удовлетворяет исходному уравнению (5.4) при любой зависимости $A(\tau)$. Действительно, найдем производную $\frac{dB(t)}{dt}$. По правилу дифференцирования произведения получим:

$$\frac{dB(t)}{dt} = -\omega v e^{-vt} \int_0^t A(\tau)\, e^{v\tau}\, d\tau + \omega e^{-vt} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t A(\tau)\, e^{v\tau}\, d\tau\right).$$

Так как по свойству производной от интеграла (см. гл. II, § 9)

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t A(\tau)\, e^{v\tau}\, d\tau\right) = A(t)\, e^{vt},$$

то

$$\frac{dB}{dt} = -\omega v e^{-vt} \int_0^t A(\tau)\, e^{v\tau} d\tau + \omega A(t) = -vB + \omega A.$$

Если же мы положим $A(\tau)=A_0 e^{-\omega\tau}$, то получим конкретное решение

$$B(t)=\frac{A_0\omega}{v-\omega}(e^{-\omega t}-e^{-vt}).$$

Решение можно было найти, и не прибегая к рассмотрению отдельных групп атомов. Теперь, когда решение найдено, уже легко угадать математический прием, ведущий к цели. Решение (5.5) имеет вид

$$B(t)=e^{-vt}\;I(t), \tag{5.6}$$

где $I(t)$ обозначает интеграл, зависящий от t. Будем искать решение в виде произведения e^{-vt} на неизвестную функцию I и составим уравнение для I

$$\frac{dB}{dt}=\frac{d}{dt}(e^{-vt}I)=-ve^{-vt}I+e^{-vt}\frac{dI}{dt}. \tag{5.7}$$

Подставляя выражения (5.7) и (5.6) в уравнение (5.4), получим:

$$e^{-vt}\cdot\frac{dI}{dt}=\omega A(t)$$

или

$$\frac{dI}{dt}=\omega e^{vt}A(t). \tag{5.8}$$

По условию в начальный момент $t=0$, $B=0$, а значит, и $I=0$.

Решение уравнения (5.8) с этим начальным условием имеет вид

$$I(t)=\int_0^t \omega e^{v\tau}A(\tau)\,d\tau$$

и окончательно

$$B(t)=e^{-vt}I(t)=e^{-vt}\int_0^t \omega A(\tau)\,e^{v\tau}\,d\tau.$$

В этой формуле существенно, во избежание ошибок, сохранять более строгие обозначения и не обозначать переменную интегрирования τ той же буквой, которой обозначен предел интегрирования t.

§ 6. Исследоваиие решения для радиоактивного семейства

В предыдущем параграфе мы довели до конца решение задачи в случае двух радиоактивных веществ. Исследуем это решение для двух частных случаев:

1) короткоживущее материнское вещество A, долгоживущее дочернее вещество B;

2) долгоживущее материнское вещество A, короткоживущее дочернее вещество B.

Ниже мы будем наряду с вероятностями распада ω и v пользоваться средними временами жизни $\overline{t_A}=\frac{1}{\omega}$, $\overline{t_B}=\frac{1}{v}$.

В первом случае характер решения легко понять без расчетов и формул. Весь процесс распадается на две стадии. Сперва, при t порядка $\overline{t_A}$ (при этом по условию $\overline{t_A}\ll\overline{t_B}$, поэтому и $t\ll t_B$ в первой стадии), происходит превращение A в B; распада вещества B за это время практически не происходит. В этом периоде количество B равно разности начального количества A_0 и количества A, уцелевшего к моменту t,

$$B(t)=A_0-A(t)=A_0-A_0e^{-\omega t}=A_0(1-e^{-\omega t}) \qquad (t\ll\overline{t_B}).$$

В конце этого периода практически все вещество A превратилось в B, количество B становится равным начальному количеству материнского вещества A_0. После этого медленно, длительно происходит распад B

$$B(t)=A_0e^{-vt}, \quad t\gg\overline{t_A}.$$

Покажем, как эти выражения получаются из точной формулы. Для случая двух радиоактивных веществ A и B мы получили в предыдущем параграфе формулу

$$B(t)=A_0\frac{\omega}{v-\omega}(e^{-\omega t}-e^{-vt}).$$

В нашем случае $\overline{t_A}\ll\overline{t_B}$, $\omega\gg v$, поэтому удобнее переменить знаки, чтобы иметь дело с положительными величинами в скобках и в знаменателе дроби. Тогда

$$B(t)=A_0\frac{\omega}{\omega-v}(e^{-vt}-e^{-\omega t}). \qquad (6.1)$$

Так как $v\ll\omega$, то $\frac{\omega}{\omega-v}\approx\frac{\omega}{\omega}=1$.

Выражение $e^{-vt} - e^{-\omega t}$ рассмотрим для двух последовательных стадий. Сначала, при $t \ll \overline{t_B} = \frac{1}{v}$, будет $vt \ll 1$. При этом $e^{-vt} \approx 1$. Так как t может быть величиной порядка $\overline{t}_A$, а ωt, следовательно, порядка единицы, то величину $e^{-\omega t}$ надо вычислять точно. Из формулы (6.1) получаем:

$$B(t) = A_0 (1 - e^{-\omega t}).$$

Во второй стадии, при $t \gg \overline{t}_A = \frac{1}{\omega}$, будет $\omega t \gg 1$. В этой стадии можно пренебречь $e^{-\omega t}$. При этом $e^{-\omega t}$ мало не только по сравнению с единицей, но и по сравнению с e^{-vt}, так как $v \ll \omega$. Получим:

$$B(t) = A_0 e^{-vt}.$$

Таким образом, действительно, точная формула дает те результаты, которые были получены из простых качественных соображений.

Обратимся ко второму случаю долгоживущего материнского вещества A и короткоживущего дочернего вещества B

$$\overline{t}_A \gg \overline{t}_B, \quad \omega \ll v.$$

Рассмотрим период, когда со времени начала процесса прошло время t, значительно превышающее $\overline{t}_B$. В таком случае то вещество B, которое образовалось в начале процесса, к моменту t уже полностью распалось. Так как B распадается быстро, за малое время, то в каждый данный момент в наличии находится вещество B, образовавшееся недавно. В рассматриваемом случае имеет место *установившееся состояние* или, как его иначе называют, *стационарное состояние*: вещество B образуется из A и тут же распадается, вещество B при этом не накапливается (потому что оно быстро распадается), но и не исчезает совсем (потому что из вещества A все время получается новое вещество B). В установившемся состоянии в единицу времени распадается столько атомов B, сколько образуется атомов B из A. Математически это условие записывается так:

$$vB = \omega A.$$

Отсюда

$$B(t)=\frac{\omega}{v}A(t)=\frac{\bar{t}_B}{\bar{t}_A}A(t).$$

В установившемся состоянии мгновенное количество B пропорционально количеству A и составляет всегда одну и ту же малую долю A. Эта доля мала потому, что в рассматриваемом втором случае $\bar{t}_B \ll \bar{t}_A$ и, значит, $\frac{\bar{t}_B}{\bar{t}_A} \ll 1$, а иначе не было бы и самого установившегося состояния.

Как получается уравнение для установившегося состояния из точного дифференциального уравнения $\frac{dB}{dt}=-vB+\omega A$? Очевидно, если считать, что $\frac{dB}{dt}$ мало по сравнению с каждым из двух членов, стоящих в правой части, то приближенно как раз и получим, заменяя $\frac{dB}{dt}$ на 0,

$$0=-vB+\omega A, \quad vB=\omega A.$$

Рассмотрим теперь начало процесса. При $t=0$ $A=A_0$, $B=0$. Значит в начальный момент мы имеем дело не с установившимся состоянием, так как по формулам установившегося состояния должно быть вначале

$$B_s=\frac{\omega}{v}A_0$$

(значок s у буквы B означает установившееся стационарное состояние). В момент $t=0$ вещество B образуется со скоростью $\frac{dB}{dt}=\omega A_0$, а распада B в начальный момент вовсе не происходит, так как $B=0$.

Можно определить, за какое *время* t_1 при начальной скорости нарастания B будет достигнуто количество B_s. Действительно, если скорость образования вещества остается постоянной, равной $\left(\frac{dB}{dt}\right)_{t=0}$, то

$$B=t\left(\frac{dB}{dt}\right)_{t=0}.$$

Полагая здесь $B_s = \frac{\omega}{v} A_0$, $\left(\frac{dB}{dt}\right)_{t=0} = \omega A_0$, получим искомое время

$$t_1 = \frac{\omega A_0}{v \omega A_0} = \frac{1}{v} = \bar{t}_B.$$

Таким образом, установившееся состояние достигается за время, приблизительно равное среднему времени распада

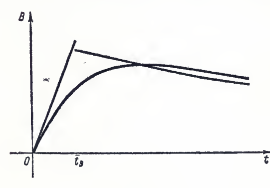


Рис. 121.

вещества B. Из условия $\bar{t}_A \ll \bar{t}_B$ видно, что количество вещества A за это время изменится мало.

В целом приближенное рассмотрение во втором случае короткоживущего дочернего вещества дает следующее:

$$\text{при } t < \bar{t}_B \qquad B(t) = \left(\frac{dB}{dt}\right)_{t=0} t = \omega A_0 t,$$

$$\text{при } t > \bar{t}_B \qquad B(t) = B_s = \frac{\omega}{v} A_0 e^{-\omega t} = \omega \bar{t}_B A_0 e^{-\omega t}.$$

Мы получаем зависимость $B = B(t)$ в виде двух линий: сначала прямой, потом показательной функции (рис. 121, $\bar{t}_A = 10\,\bar{t}_B$). Нетрудно проверить, что при $t = \bar{t}_B$ две формулы дают близкие значения.

Посмотрим, что дает точное решение уравнения (6.1)

$$B = A_0 \frac{\omega}{v - \omega} (e^{-\omega t} - e^{-vt})$$

в рассматриваемом случае, когда $v \gg \omega$, $\overline{t_B} \ll \overline{t_A}$. Пренебрегаем ω по сравнению с v в знаменателе. При $vt \gg 1$ пренебрегаем e^{-vt} в скобке. Получим:

$$B = A_0 \frac{\omega}{v} e^{-\omega t},$$

т. е. как раз установившееся решение.

Приближение решения к установившемуся определяем тем, насколько быстро убывает e^{-vt}. При совсем малом t, когда $vt < 1$, так что ωt и подавно мало, получим, разлагая в ряд e^{-vt} и $e^{-\omega t}$ и ограничиваясь двумя первыми членами,

$$B = A_0 \frac{\omega}{v-\omega}(1 - \omega t - 1 + vt) = A_0 \omega t,$$

что также совпадает с приближенным результатом. Однако в действительности точная формула дает на графике одну плавную кривую, без разрывов и изломов (она показана на рис. 121). Приближение этой кривой к установившемуся решению зависит от того, насколько быстро уменьшается e^{-vt}. Так, для того чтобы e^{-vt} давало поправку порядка 10%, нужно, чтобы было $vt = 2{,}3$, $t = 2{,}3 \cdot \frac{1}{v} = 2{,}3\overline{t_B}$. При этом из-за малости ωt считаем, что $e^{-\omega t} \approx 1$. Таким образом, действительно, переход от стадии начального нарастания к стадии, когда решение с достаточной точностью равно установившемуся, происходит за время порядка времени распада $\overline{t_B}$.

Пример радиоактивного семейства очень поучителен в том отношении, что получение общего точного решения никоим образом нельзя считать концом работы над задачей. Построение приближенных теорий для различных предельных случаев есть совершенно необходимая часть работы, и наличие точной формулы вовсе не заменяет приближенной теории. Приближенные, но ясные и наглядные представления служат для проверки точной формулы.

Приближенные теории дают нам такие важные новые качественные понятия, как понятие установившегося состояния. Такие понятия и лучше запоминаются, и обладают более широкой областью применимости, чем точные формулы. Так, например, в случае радиоактивного семейства, состоящего

из нескольких поколений $A \to B \to C \to D$, точная формула весьма громоздка. Однако если $\overline{t_A}$ больше всех других времен, то все результаты, относящиеся к установившемуся состоянию, получаются так же просто, как и в случае двух веществ A и B.

Часто наиболее легкий путь состоит в том, чтобы получить точное решение, справедливое для любых v и ω (в иашем примере), из которого затем при $v \ll \omega$ или $v \gg \omega$ путем математических преобразований получаются более простые приближенные формулы для двух крайних случаев. На этом иельзя успокаиваться! Если простая приближенная формула получилась хотя и легким, но длинным путем через общее решение, то рядом должен быть другой, простой путь получения приближенной формулы. Нужно обязательно тренироваться в иахождении простых путей, потому что будут встречаться задачи, в которых путь, приводящий к точному решению, непреодолимо сложен, и только простой приближенный путь позволит продвинуть вперед решение вопроса.

В практической работе точные формулы встречаются так же редко, как уравнения, решения которых выражаются целыми числами, хотя в учебниках большинство задач приводят к точным формулам подобно тому, как в задачниках младших классов уравнения всегда решаются в целых числах.

Отметим, что представления о радиоактивных семействах объясняют странный результат, получившийся в упражнении § 3 относительно количества радия в прошлом: радий является потомком (правда, не прямым, а через иесколько промежуточных веществ) урана-238. Поэтому нельзя считать имеющееся в настоящее время количество радия результатом распада первоначального радия. В действительности радий находится в установившемся состоянии с ураиом. Из уравнения

$$B = \frac{\omega}{v} A$$

найдем, что содержание радия $B = 10^{-12}$ соответствует содержанию урана

$$A = \frac{\overline{t_A}}{\overline{t_B}} B = 3 \cdot 10^6 B = 3 \cdot 10^{-6}.$$

Мы нашли приближенно современное количество урана-238 в горных породах. Начальное содержание $5 \cdot 10^9$ лет назад было вдвое больше, порядка $6 \cdot 10^{-6}$. Такие величины вполне правдоподобны в отличие от результатов упражнения § 3.

§ 7. Цепная реакция деления урана

В 1938 г. Хан и Штрассман в Германии и супруги Жолио-Кюри во Франции показали, что при попадании нейтрона в ядро урана происходит деление ядра, при котором оно распадается на два больших осколка и, кроме того, испускает два-три новых нейтрона. Особенно активно делится уран с атомным весом 235 (коротко уран-235). В природном уране содержится около 0,7% атомов урана-235 и 99,3% атомов урана-238 *). «Осколки» деления урана-235 представляют собой ядра среднего атомного веса — от 75 до 160; заряд этих ядер лежит в пределах от 35 до 57, при этом сумма зарядов двух осколков всегда равна заряду ядра урана, т. е. 92 элементарным зарядам; сумма атомных весов двух осколков равна $235 + 1 - \nu$, где 235 — атомный вес урана, 1 — атомный вес нейтрона, вызвавшего деление, ν — число нейтронов, образовавшихся при делении. При делении выделяется большая энергия — $6 \cdot 10^{17}$ *эрг/г* (на грамм разделившегося урана). Благодаря этой энергии осколки летят в противоположные стороны со скоростью около 10^9 *см/сек*.

*) Вслед за этим в 1939 г. в лаборатории И. В. Курчатова в Ленинграде советские ученые Г. Н. Флеров и К. А. Петржак показали, что уран-238 способен делиться самопроизвольно, без попадания в него нейтрона, хотя вероятность этого весьма мала. Вероятность радиоактивного распада (с испусканием α-частицы) урана-238, соответствующая периоду полураспада $4,5 \cdot 10^9$ лет, равна $\omega = 5 \cdot 10^{-18}$ *1/сек*, а вероятность самопроизвольного деления урана-238 в 10^6 раз меньше, т. е. равна $5 \cdot 10^{-24}$ *1/сек*. Таким образом, в 1 *кг* урана, содержащем примерно $2,5 \cdot 10^{21}$ атомов, в 1 *сек* происходит примерно 10^7 актов радиоактивного распада и всего 10 самопроизвольных делений.

Однако в самых тяжелых элементах самопроизвольное деление становится уже главным, наиболее вероятным процессом распада (см. конец § 4, где приведена кривая распада менделевия). В рассматриваемом ниже вопросе о цепной реакции самопроизвольное деление роли не играет.

Источником этой энергии является электрическое отталкивание двух одноименно заряженных осколков. Пока ядро не разделилось на две части, ядерные силы между частицами, из которых состоит ядро, уравновешивают электрическое отталкивание. Как только ядро разделилось на два отдельных осколка, отталкивание этих двух осколков уже ничем не уравновешивается и приводит к тому, что они разлетаются с большой скоростью. В плотном веществе осколки очень быстро останавливаются. Время их движения составляет от 10^{-13} до 10^{-12} *сек*. При этом они проходят от 10^{-4} до 10^{-3} *см*. Кинетическая энергия осколков переходит в тепло. Нейтроны, образующиеся при делении, имеют скорость того же порядка, что и осколки (около $2 \cdot 10^{9}$ *см/сек*).

Для практического использования энергии деления ядер решающее значение имеет тот факт, что при делении, вызванном одним нейтроном, получается больше одного нейтрона. Ясно, что если нейтроны не будут уходить из системы, то число их будет нарастать в геометрической прогрессии с течением времени, т. е. по закону показательной функции. По такому же закону, пропорционально числу нейтронов, будет нарастать скорость выделения энергии. При этом если даже в начале процесса было мало нейтронов, то очень скоро число их возрастает настолько, что энергия будет выделяться со скоростью, удобной для практического использования (например, в качестве источника энергии атомной электростанции или ледокола), еще через совсем небольшое время выделение энергии возрастет настолько, что произойдет атомный взрыв. В действительности часть нейтронов выходит из системы, часть нейтронов может захватываться другими ядрами, не вызывая деления; пользуясь этим, можно регулировать число нейтронов; в частности, можно добиться установившегося состояния системы, при котором число образующихся в единицу времени нейтронов равно числу исчезающих нейтронов, так что число нейтронов, находящихся в системе, с течением времени не изменяется, выделение энергии происходит с постоянной скоростью. Для использования атомной энергии в мирных целях нужен именно такой режим работы.

Наша ближайшая задача — составить и исследовать уравнение, описывающее зависимость числа нейтронов в системе от времени.

§ 8. Размножение нейтронов в большой массе

Получим сперва уравнение для изменения числа нейтронов со временем в очень большой системе (например, в большом слитке урана-235), когда выход нейтронов наружу можно не учитывать *). Скорость всех нейтронов приближенно можно считать одинаковой; обозначим ее через v.

Деление ядра происходит приблизительно в половине всех случаев, когда нейтрон попадает в ядро урана-235. Во второй половине случаев нейтрон вылетает обратно, оставляя ядро в прежнем состоянии, и при этом число нейтронов не меняется. Ядро урана представляет собой шарик радиуса R порядка 10^{-12} *см*.

Как часто нейтрон, летящий внутри металла, попадает в ядро урана?

За малое время dt нейтрон проходит путь vdt. Представим себе цилиндр, осью которого является путь, пройденный нейтроном, радиус цилиндра равен радиусу ядра урана R. Нейтрон сталкивается с теми ядрами, центр которых находится внутри цилиндра; если центр ядра находится внутри цилиндра, значит, путь нейтрона проходит на расстоянии меньше R от центра ядра, поэтому нейтрон задевает ядро, попадает в него. Объем цилиндра равен

$$\pi R^2 v dt.$$

В металлическом уране в единице объема содержится N атомов и, следовательно, N ядер $\left(\text{размерность } N \text{ есть } \frac{1}{см^3}\right)$.
Поэтому в интересующем нас объеме $\pi R^2 vdt$ имеется $N\pi R^2 v\,dt$ ядер. Столько же будет попаданий нейтрона в ядро за малый промежуток времени dt. Не всякое попадание нейтрона вызывает деление ядра. Пусть α есть доля тех случаев попадания нейтрона в ядро, когда это попадание вызвало деление $\left(\text{в случае урана-235 } \alpha \approx \frac{1}{2}\right)$. Тогда число делений за время dt равно

$$N\alpha\pi R^2 v\,dt.$$

*) Мы будем рассматривать самый простой случай металлического урана-235, без графитового замедлителя и т. п.

Величина $\alpha\pi R^2$, имеющая размерность площади, так как α и π безразмерны, называется сечением деления и обозначается σ_f*).

Если внутри массы металлического урана находятся n нейтронов, то число делений за время dt равно

$$nN\sigma_f v\,dt.$$

При каждом делении образуется ν нейтронов, но за счет поглощения одного нейтрона. Таким образом, изменение числа нейтронов при каждом делении равно $(\nu-1)$. Написанному выше числу делений соответствует изменение числа нейтронов

$$dn = nN(\nu-1)\,\sigma_f v\,dt. \tag{8.1}$$

Таким образом, из (8.1) получаем:

$$\frac{dn}{dt} = nN(\nu-1)\,\sigma_f v.$$

Положим

$$N(\nu-1)\,\sigma_f v = a; \tag{8.2}$$

тогда

$$\frac{dn}{dt} = an.$$

Как мы уже знаем, решением такого уравнения является

$$n(t) = n_0 e^{at}, \tag{8.3}$$

где n_0 — число нейтронов в системе при $t=0$.

Таким образом, если число нейтронов в системе меняется только по причине деления, то число нейтронов растет в геометрической прогрессии, если время растет в арифметической прогрессии.

Действительно, если взять несколько равноотстоящих моментов времени

$$t_1,\ t_1+\Delta t,\quad t_1+2\Delta t,\quad t_1+3\Delta t,\ \ldots,$$

то соответствующее число нейтронов равно

$$n_1 = n_0 e^{at_1},\quad fn_1,\quad f^2 n_1,\quad f^3 n_1,\quad \ldots,\quad \text{где}\quad f = e^{a\Delta t}.$$

Отметим, что такой способ описания процесса — «рост в геометрической прогрессии» — часто встречается в популярной литературе. Специалисты физики и техники пользуются им редко и говорят об экспоненциальном, т. е. показательном

*) σ — греческая буква «сигма». Индекс f есть первая буква английского слова fission (деление ядер).

законе возрастаиия. Показательный закон характеризуется скоростью роста a [формула (8.3)].

Найдем размериость a. В формуле (8.3) at стоит в показателе степени. Поэтому at безразмерная величина и, следовательно, размерность a есть $1/сек$. Этот же результат можно получить, припомнив, что

$$a = N\frac{1}{см^3}(\nu - 1)\,\sigma_f\ см^2\, v\,\frac{см}{сек}.$$

Найдем приближенное значение постоянной величины a. Плотиость урана приблнзительно равна 18 $г/см^3$. Число ядер в 1 $см^3$ N подсчитаем, вспоминая число Авогадро: 1 грамм-атом любого вещества содержит $6\cdot 10^{23}$ атомов. Следовательно, 235 $г$ урана-235 содержат $6\cdot 10^{23}$ атомов, т. е. $6\cdot 10^{23}$ ядер. В 1 $см^3$ содержится $\frac{18}{235}\cdot 6\cdot 10^{23} \approx 4\cdot 10^{22}$ ядер, $N = 4\cdot 10^{22}$ $1/см^3$. Подставим среднее значеиие $\nu \approx 2{,}5$, $v = 2\cdot 10^9$ $см/сек$, $\sigma_f = \frac{1}{2}\pi(10^{-12})^2 = 1{,}6\cdot 10^{-24}$ $см^2$. Получим $a = 4\cdot 10^{22}\cdot 1{,}5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-24}\cdot 2\cdot 10^9 = 2\cdot 10^8\ 1/сек$; $\frac{1}{a} \doteq 5\cdot 10^{-9}$ $сек$.

Такнм образом, если нейтроны не вылетают из системы, то количество иейтронов возрастает в e раз за $5\cdot 10^{-9}$ $сек$.

При такой скорости возрастаиия за одну микросекуиду, т. е. за 10^{-6} $сек$, количество нейтроиов возрастает в

$$e^{2\cdot 10^8\cdot 10^{-6}} = e^{200} \text{ раз, т. е. в } 10^{0.43\cdot 200} = 10^{86} \text{ раз.}$$

Одна тонна урана-235 содержит $2{,}5\cdot 10^{27}$ ядер. Поэтому если иейтроны не выходят нз системы, то это количество урана разделится меньше чем за одиу микросекунду. Такой процесс представляет собой взрыв.

Для энергетического использования делеиня такая скорость нарастания процесса иедопустима. Необходимо, чтобы вылет нейтронов из системы уменьшил скорость иарастания иейтронов.

§ 9. Вылет нейтронов

Представим себе массу ураиа-235 в виде шара радиуса r. Мы должны составить уравнение для чнсла n иейтроиов, иаходящихся внутри этого шара. Предположим для простоты, что шар закреплен иа какой-то тонкой подставке, так

что вокруг него полная пустота, нейтрон, покинувший шар, уже никогда не возвращается обратно.

Как определить поток нейтронов, т. е. число нейтронов, выходящих за пределы шара в единицу времени? Сделаем грубый подсчет. Рассмотрим малый промежуток времени dt. За это время каждый нейтрон проходит путь длиной $v\,dt$. Где находятся те нейтроны, которые покинут шар за время dt? Очевидно, они должны находиться внутри шара в тонком слое, прилегающем к поверхности шара, но на расстоянии не более $v\,dt$ от поверхности, иначе за время dt они не успеют дойти до поверхности, пересечь ее и выйти наружу. Но и те нейтроны, которые находятся внутри слоя толщиной $v\,dt$, тоже не все успеют выйти за время dt, так как не у всех нейтронов внутри слоя скорость направлена по радиусу наружу; при самом грубом подсчете мы не будем учитывать последнее обстоятельство.

Как найти число нейтронов в слое? Во всем шаре находится n нейтронов. Объем шара $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, объем интересующего нас тонкого слоя у поверхности приближенно равен $Sv\,dt$, если $v\,dt$ мало. Здесь $S=4\pi r^2$ (поверхность шара).

Средняя плотность нейтронов, т. е. число нейтронов в единице объема, равна $C=\frac{n}{V}$. Предположим, что в тонком слое у поверхности плотность не отличается от средней. Тогда число нейтронов в этом слое равно

$$CSv\,dt=\frac{nS}{V}v\,dt.$$

Поэтому поток (число нейтронов, выходящих в единицу времени) есть

$$q=\frac{nS}{V}v=\frac{n\cdot 4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3}v=\frac{3v}{r}n.$$

В действительности у поверхности плотность нейтронов меньше средней плотности, к тому же, как отмечалось выше, скорости нейтронов имеют различные направления. Поэтому в действительности поток нейтронов меньше, чем мы получили,

$$q=\frac{3kv}{r}n, \qquad (9.1)$$

где k — численный коэффициент, $k < 1$. Ниже, в § 12, путем сопоставления с опытом будет показано, что k близко к 0,3. Если внутри шара не происходит деления ядер и не рождаются новые нейтроны, то для числа нейтронов внутри шара получается уравнение $\frac{dn}{dt} = -q$ или, пользуясь (9.1),

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3kv}{r} n.$$

Обозначая

$$\frac{3kv}{r} = b, \tag{9.2}$$

получим:

$$\frac{dn}{dt} = -bn.$$

Решение такого уравнения нам хорошо известно

$$n = n_0 e^{-bt}. \tag{9.3}$$

Среднее время пребывания нейтронов внутри шара согласно (9.3) равно

$$\overline{t} = \frac{1}{b} = \frac{r}{3kv}.$$

Заметим, что $\overline{t} \approx \frac{r}{v}$. Поэтому среднее время приблизительно равно времени, за которое нейтрон, движущийся со скоростью v, проходит путь, равный радиусу шара r. Точное рассмотрение вылета нейтронов требует весьма трудоемких расчетов. Очень важно с первых шагов обучения привыкнуть приближенно определять все интересующие нас величины. Точный расчет часто бывает действительно очень труден и требует совсем другого объема знаний, иногда требует коллективного труда нескольких человек с использованием счетных машин и т. д. Значит ли это, что учащийся, занимающийся самообразованием где-нибудь далеко от Москвы, далеко от высших учебных заведений, не может и помышлять о рассмотрении вопроса? Всегда есть простые, хотя и грубые (вроде приведенного выше) способы приближенного подхода к вопросу. Не произвести приближенного расчета и ссылаться на то, что точный расчет труден, значит просто прикрывать такой ссылкой свою нерешительность и робость. Чаще всего именно робость мешает начинающим ученым и изобретателям!

§ 10. Критическая масса

До сих пор мы рассматривали отдельно два процесса: размножение нейтронов без учета их вылета и вылет нейтронов без учета их размножения.

Рассмотрим теперь систему, в которой нейтроны и размножаются и могут уходить из системы. В единицу времени в системе, как мы знаем, образуются an нейтронов и bn нейтронов вылетают из системы. Так как изменение числа нейтронов в единицу времени есть $\frac{dn}{dt}$, то

$$\frac{dn}{dt} = an - bn$$

или

$$\frac{dn}{dt} = cn, \tag{10.1}$$

где $c = a - b$. При данном начальном количестве нейтронов n_0 уравнение (10.1) имеет решение

$$n = n_0 e^{ct}. \tag{10.2}$$

Это решение приводит к совершенно различным результатам при положительном и отрицательном c. Действительно, из (10.2) видно, что при $c < 0$ число нейтронов n тем меньше, чем больше t, т. е. с течением времени n стремится к нулю. Если же $c > 0$, то n тем больше, чем больше t, т. е. n неограниченно растет с течением времени. Только вмешательство новых физических факторов, не учтенных в уравнении, может приостановить рост n.

Таким образом, значение $c = 0$ есть «критическое значение»,— это значение разделяет решения разного типа с растущим и уменьшающимся количеством нейтронов. Так как $c = a - b$, то при данном a можно говорить о критическом значении b: $b_{кр} = a$, так как при $b < b_{кр} = a$ $c = a - b > 0$, а при $b > b_{кр} = a$ $c = a - b < 0$. Величина a определяется свойствами делящегося вещества: согласно формуле (8.2) $a = Nv\sigma_f(\nu - 1)$. Величина b зависит от количества взятого делящегося вещества

$$b = \frac{3kv}{r}. \tag{9.2}$$

Поэтому вводят понятие критического значения радиуса $r_{\text{кр}}$, при котором $b = b_{\text{кр}} = a$. Из формул (8.2) и (9.2) следует, что $\frac{3kv}{r_{\text{кр}}} = Nv\sigma_f(\nu - 1)$, откуда

$$r_{\text{кр}} = \frac{3k}{N\sigma_f(\nu - 1)}.$$

Масса шара, радиус которого равен $r_{\text{кр}}$, называется критической массой $m_{\text{кр}}$. Ясно, что

$$m_{\text{кр}} = \frac{4}{3}\pi r_{\text{кр}}^3 \rho, \tag{10.3}$$

где ρ — плотность делящегося вещества *).

При $r > r_{\text{кр}}$ (это то же, что $m > m_{\text{кр}}$) будет $c > 0$ — имеет место размножение нейтронов. При $r < r_{\text{кр}}$ $(m < m_{\text{кр}})$ будет $c < 0$ — первоначально взятое количество нейтронов уменьшается. Пусть взят шар радиуса r. Его поверхность есть

$$S = 4\pi r^2,$$

объем

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r}.$$

Если r мало, то это отношение велико, если же r велико, то это отношение мало. Не удивительно, что при малом радиусе, когда отношение поверхности к объему велико, вылет нейтронов усиливается, условия для размножения нейтронов хуже. Удивительна та резкость, с которой меняется количество нейтронов при изменении b: если $b > b_{\text{кр}}$, то через некоторое время количество нейтронов обращается практически в нуль независимо от того, равно ли $b = 1{,}01 b_{\text{кр}}$ или $b = 2b_{\text{кр}}$. Если $b < b_{\text{кр}}$, то число нейтронов неограниченно возрастает и при $b = 0{,}99 b_{\text{кр}}$, и при $b = 0{,}5 b_{\text{кр}}$, хотя с разной скоростью. Именно поэтому говорят о «критическом» значении b, «критическом» значении r или «критическом» значении

*) Мы по-прежнему считаем, что рассматривается масса делящегося вещества (например, урана), имеющая форму шара.

массы. Масса больше критической называется надкритической, масса меньше критической называется подкритической.

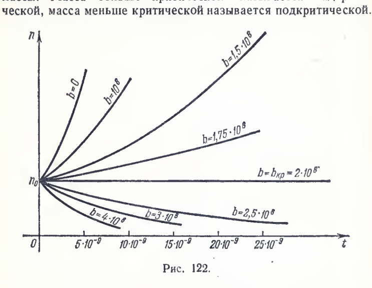


Рис. 122.

На рис. 122 представлены кривые $n = n_0 e^{(a-b)t}$ при нескольких значениях b. Построим кривые зависимости n от b

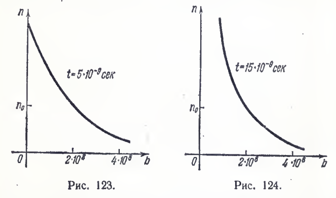


Рис. 123. Рис. 124.

для нескольких определенных значений времени t. При расчете принято $a = 2 \cdot 10^8 \frac{1}{сек}$. На рис. 123 показана кривая $n(b)$

при $t=5\cdot 10^{-9}$ *сек*, на рис. 124 показана кривая $n(b)$ при $t=15\cdot 10^{-9}$, на рис. 125 показана кривая $n(b)$ при $t=30\cdot 10^{-9}$.

Пересечение кривых с осью ординат ($b=0$) на рис. 124 и 125 уже не помещается на чертеже: на рис. 124 при $b=0$ $n=20n_0$, на рис. 125 при $b=0$ $n=400n_0$.

Рис. 125.

Как видно из рис. 122, а также из сопоставления рис. 123—125, чем больше время t, тем сильнее расходятся кривые $n(t)$ (рис. 122), тем круче кривые $n(b)$ (рис. 123—125), тем резче проявляется критичность значения $b=2\cdot 10^8$ (в данном примере).

Если взять $t>10^{-6}$ *сек*, то кривую $n(b)$ нельзя будет отличить от вертикальной прямой $b=b_{кр}=2\cdot 10^8$; $n=0$ при $b>b_{кр}$, $n=\infty$ при $b<b_{кр}$.

§ 11. Подкритическая и надкритическая масса при непрерывном источнике нейтронов

В предыдущем параграфе была рассмотрена задача об изменении со временем числа нейтронов при данном начальном числе нейтронов n_0. Поставим теперь несколько иную задачу. Пусть в начальный момент $t=0$ число нейтронов равно нулю и в этот момент включен источник нейтронов, испускающий q_0 нейтронов в единицу времени. Эта задача приводит к уравнению

$$\frac{dn}{dt}=cn+q_0, \tag{11.1}$$

где $c=a-b$. Мы ищем решение этого уравнения с начальным условием: при $t=0$, $n=0$.

Способ решения похожей задачи был изложен в § 5. Вкратце повторим ход рассуждений. Ищем количество нейтронов в момент t. Весь промежуток времени от 0 до t разбиваем на отдельные промежутки $\Delta\tau$. Рассмотрим один такой промежуток времени от τ до $\tau+\Delta\tau$. Источник дал за это время количество нейтронов $q_0\Delta\tau$. Если бы источник действовал только в течение одного промежутка времени $\Delta\tau$, то мы

имели бы дело с задачей предыдущего параграфа с начальным количеством нейтронов $n_0 = q_0\Delta\tau$; единственная разница была бы в том, что эти нейтроны выделились в момент $t = \tau$, а не $t = 0$. Поэтому вместо решения $n = n_0 e^{ct}$ мы получили бы решение $n = n_0 e^{c(t-\tau)} = q_0\Delta\tau e^{c(t-\tau)}$ (это решение относится к $t > \tau$; при $t < \tau$ $n = 0$), так как ясно, что изменение количества нейтронов зависит именно от времени, которое прошло после того момента, когда было задано начальное количество их, т. е. от величины $t - \tau$ в данном случае.

На самом деле источник действует непрерывно в течение всего времени от 0 до t. Значит, надо сложить вклад всех нейтронов, испущенных источником в различные промежутки времени $\Delta\tau$, причем в сумме эти промежутки времени покрывают весь промежуток времени от 0 до t. Такая сумма при малых $\Delta\tau$ представляет собой интеграл, поэтому

$$n(t) = \int_0^t q_0 e^{c(t-\tau)}\, d\tau.$$

Этот интеграл легко вычислить:

$$n(t) = q_0 e^{ct}\int_0^t e^{-c\tau}\, d\tau = q_0 e^{ct} \cdot \frac{-1}{c} e^{-c\tau}\Big|_0^t =$$

$$= q_0 e^{ct} \cdot \frac{-1}{c}(e^{-ct} - 1) = \frac{q_0}{c}(e^{ct} - 1). \qquad (11.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что это решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{q_0}{c}(e^{ct} - 1)\right] = q_0 e^{ct} = cn + q_0$$

и условию при $t = 0$ $n = 0$.

Одна и та же формула (11.2) дает решение при положительном и при отрицательном значении c. Однако вид кривой $n = n(t)$ при этом существенно различен. При $c > 0$ (т. е. при $a > b$) показатель ct положителен, так что с ростом t величина e^{ct} быстро становится гораздо больше единицы. При большом t и $c > 0$

$$n \approx \frac{q_0}{c} e^{ct}.$$

При $c < 0$ величина $ct < 0$, поэтому с ростом t e^{ct} становится гораздо меньше единицы и значения n приближаются к числу *) $-\frac{q_0}{c}$,

$$n \approx -\frac{q_0}{c}.$$

Вид кривых показан на рис. 126.

Отметим любопытный частный случай $c = 0$. Если $c = 0$, то формулой (11.2) непосредственно пользоваться нельзя.

Разложим e^{ct} в ряд

$$e^{ct} = 1 + ct + \frac{(ct)^2}{2} + \ldots$$

Подставляя в формулу (11.2), получим:

$$n(t) = \frac{q_0}{c}\left[1 + ct + \frac{(ct)^2}{2} + \ldots - 1\right] = q_0\left[t + \frac{1}{2}ct^2 + \ldots\right].$$

Этой формулой можно пользоваться при $c = 0$, получаем:

$$n(t) = q_0 t. \quad (11.3)$$

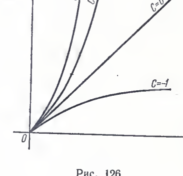


Рис. 126.

Последний результат нетрудно получить и из уравнения (11.1). Действительно, при $c = 0$ (11.1) имеет вид $\frac{dn}{dt} = q_0$. Отсюда $n(t) = q_0 t + A$, где A — постоянная интегрирования. При $t = 0$ должно быть $n = 0$, поэтому $A = 0$, и получаем (11.3).

Как было показано выше, при $c < 0$ концентрация нейтронов с течением времени достигает постоянного значения $-\frac{q_0}{c}$ или, что то же самое, $\frac{q_0}{|c|}$. Чем меньше $|c|$ (чем мы ближе к критическому состоянию), тем больше это постоянное значение. Таким образом, даже при очень слабом источнике (малом q_0) масса, близкая к критической, может

*) Это число положительно, так как $c < 0$.

давать любое большое число нейтронов, большое число делений, большое выделение энергии. В принципе режим работы атомных котлов именно такой.

Поддержание такого режима является нелегкой задачей, так как малые изменения b и c очень резко меняют величину $\frac{q_0}{c}$, когда c близко к нулю, а работа при c, близких к нулю, необходима, когда надо получать большую мощность при малом q_0. Однако при помощи автоматического регулирования эту техническую задачу удается решить: когда n выходит из заданных пределов, система регулирования меняет величины a или b. К тому же есть природные факторы, облегчающие регулирование: так, например, при увеличении n повышается температура активного вещества и при этом оказывается, что c уменьшается, так что в известных пределах система как бы саморегулируется.

§ 12. Величина критической массы

Мы знаем теперь, насколько сильно меняются свойства системы в зависимости от того, имеем ли мы дело с надкритической или подкритической массой. Рассмотрим подробнее само условие критичности

$$r_{кр} = \frac{3k}{N\sigma_f(\nu - 1)}.$$

Подставим числа для урана-235: $\sigma_f = 1{,}6\cdot 10^{-24}$, $\nu = 2{,}5$, $N = 4\cdot 10^{22}$. Получим:

$$r_{кр} = k\frac{3}{4\cdot 10^{22}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-24}\cdot 1{,}5} \approx k\cdot 30\ см.$$

Коэффициент k мы не умеем определять, знаем только, что он меньше единицы. Найдем этот коэффициент, сопоставляя формулу с опытом. Опыт показывает, что критическая масса урана-235 около 50 *кг*. Урановый шар весом 50 *кг* имеет радиус около 8,5 *см*. Следовательно, в данном случае

$$k \approx \frac{8{,}5}{30} = 0{,}3.$$

Остановимся на физическом смысле формулы для критического радиуса. В выражении $r_{кр}$ скорость нейтронов сократилась. Значит, формулу для $r_{кр}$ можно получить, не рас-

сматривая хода процесса во времени, не рассматривая скорости размножения нейтронов и скорости ухода нейтронов из системы.

Если пренебречь безразмерным множителем $3k$ (он порядка единицы), то формула для критического радиуса принимает вид

$$r_{\text{кр}} N \sigma_f \approx \frac{1}{\nu - 1}. \qquad (12.1)$$

Что за величина стоит в левой части формулы (12.1)? Объем цилиндра длиной, равной радиусу, и с площадью основания, равной σ_f, есть $r_{\text{кр}}\sigma_f$. Напомним, что если нейтрон движется по оси такого цилиндра, то он вызывает деление тех ядер урана-235, центры которых находятся внутри цилиндра. N есть число ядер в единице объема. Следовательно, $N r_{\text{кр}} \sigma_f$ есть среднее число ядер в объеме цилиндра.

Теперь можем дать другую формулировку условию критичности. Мы выяснили раньше, что средний путь, который проходит внутри делящегося вещества нейтрон, родившийся внутри вещества (в результате деления), порядка радиуса r. После того как нейтрон прошел путь около r, он выходит за пределы делящегося вещества и для процесса потерян. Условие критичности заключается в том, что в среднем на этом пути нейтрон должен до ухода из системы родить один нейтрон. При делении образуется $\nu - 1$ новых нейтронов. Значит, нужно, чтобы до вылета нейтрон вызвал примерно $\frac{1}{\nu-1}$ делений, т. е. чтобы в объеме цилиндра $r\sigma_f$ было примерно $\frac{1}{\nu-1}$ ядер. Это условие и приводит к формуле (12.1).

Понятно, что такие рассуждения не строги, но они нужны для понимания физики дела и здесь их нельзя заменить никакими расчетами, даже самыми точными вычислениями на современных электронных машинах. Такие расчеты на машинах не заменяют, а *дополняют* ясное понимание качественной, физической стороны дела. В частности, читатель должен обратить внимание на принцип, который был высказан в начале параграфа: если какая-то величина (v) входила в вывод формулы, но в окончательном результате эта величина сократилась, значит, есть вывод формулы, в котором данная величина вообще не рассматривается. Нужно всегда находить такой, более простой вывод формулы, потому что другой вывод формулы — это и другой, новый взгляд на исследуемый процесс.

§ 13. Поглощение света. Постановка задачи и грубая оценка

Рассмотрим поглощение света в воздухе, содержащем черные пылинки сажи. Пусть в единице объема содержится N пылинок. Площадь сечения одной пылинки плоскостью, перпендикулярной к лучу света, обозначим через σ. Коротко будем называть σ «сечением». Так, например, для пылинки, представляющей собой шар радиуса r, σ есть площадь сечения, проходящего через центр шара, т. е. $\sigma = \pi r^2$ *).

Будем считать, что свет, попадающий на поверхность пылинки, полностью поглощается. Задача заключается в определении зависимости доли поглощенного света и доли прошедшего света от величин N, σ и длины пути x, которую луч света прошел через воздух, содержащий пыль.

Начнем с самой грубой оценки того пути, на котором происходит поглощение значительной доли света. Эту длину обозначим через L. Что именно обозначает многозначительное выражение «значительная доля света» — в этом мы разберемся позже, в следующих параграфах. Не будем смущаться нечеткой постановкой вопроса.

Рассмотрим цилиндр с площадью основания S и длиной L. Потребуем, чтобы сумма сечений всех пылинок, находящихся в этом цилиндре, равнялась S.

В объеме цилиндра SL содержится NSL пылинок, сумма их сечений равна σNSL, значит, мы требуем, чтобы было

$$\sigma NSL = S,$$

откуда

$$L = \frac{1}{\sigma N}. \tag{13.1}$$

Проверим размерность в (13.1): σ есть площадь, ее размерность $см^2$; N есть число пылинок в единице объема, размерность $\frac{1}{см^3}$. Следовательно, $[L] = \frac{1}{см^2 \cdot \frac{1}{см^3}} = см$, как и должно быть.

*) Для пылинок сложной формы точное определение сечения σ таково: σ есть средняя площадь тени, отбрасываемой пылинкой на поверхность, перпендикулярную к лучу света.

Каков физический смысл поставленного условия? Если бы можно было разместить пылинки так, чтобы закрытые разными пылинками площади не перекрывались, то при помощи пылинок, находящихся в цилиндре с длиной L и площадью основания S, можно было бы закрыть все основание цилиндра и достичь полного поглощения всего света. При $x < L$ полное поглощение света заведомо невозможно: как ни располагай пылинки, общая площадь их сечений не достаточна для того, чтобы закрыть все основание цилиндра.

Ясно, что и при $x = L$ и даже при $x > L$ в действительности полного поглощения не будет. При случайном расположении пылинок при любом x будут оставаться такие направления, вдоль которых не окажется ни одной пылинки, и лучи света пройдут по этим направлениям.

Энергия, которую свет переносит через какую-нибудь площадку за 1 *сек*, называется потоком энергии света. Пусть I есть поток энергии света через площадку 1 $см^2$. Эта величина называется плотностью потока энергии, ее размерность $\frac{эрг}{сек \cdot см^2}$. Ниже мы будем рассматривать плотность потока световой энергии $I(x)$ в зависимости от толщины слоя x. Ясно, что

$$I(x) = I_0 f(x), \tag{13.2}$$

где I_0 есть энергия падающего света, $f(x)$ — искомая функция, характеризующая ослабление света.

Что можно сказать о свойствах функции $f(x)$? Если $x = 0$, то ослабления света еще не произошло, $I(0) = I_0$, поэтому $f(0) = 1$. Если $x > 0$, то происходит ослабление света, $I(x) < I_0$, поэтому $f(x) < 1$.

Ясно, что с увеличением x функция $f(x)$ уменьшается, приближаясь к нулю, т. е. $f(x)$ — убывающая функция. Значит, ее производная отрицательна

$$\frac{df}{dx} < 0.$$

Мы говорили, что полного поглощения не будет ни при $x = L$, ни при $x > L$, поэтому мы не ждем, чтобы $f(x)$ обратилась в нуль при $x = L$. Однако можно предполагать, что величина $x = L$ является характерной длиной. Это значит, что при прохождении светом пути $x \ll L$ доля поглощенного

света весьма мала по сравнению с долей прошедшего света; при прохождении пути $x \approx L$ поглощается заметная часть света, а при прохождении пути $x \gg L$ бо́льшая часть света поглощается, проходит только весьма малая часть света.

Функция $f(x)$, как видно из формулы (13.2), безразмерна. Можно предполагать, что если ввести безразмерную переменную $\frac{x}{L}$, то функция $f\left(\frac{x}{L}\right)$ будет всегда одинакова для любых пылинок, любых N и σ. Эти предположения будут подтверждены и уточнены в следующих параграфах.

§ 14. Уравнение поглощения и его решение

Рассмотрим тонкий слой воздуха между x и $x+dx$. Все расчеты ведем для столба воздуха в виде цилиндра с площадью основания 1 $см^2$ (в предыдущем параграфе, когда рассматривался цилиндр с площадью основания S $см^2$, величина S все равно сократилась).

Пучок света состоит из параллельных лучей и характеризуется плотностью потока энергии I. Если бы не было поглощения света пылинками, величина I была бы постоянна.

В рассматриваемом слое содержится $N\,dx$ пылинок, которые перекрывают площадь $\sigma N\,dx$ из полной площади основания слоя 1 $см^2$. Следовательно, в слое поглощается доля $\sigma N\,dx$ энергии, падающей слева на слой. Поэтому $dQ = IN\sigma\,dx$. При прохождении светом слоя dx поток энергии света уменьшается на величину, равную количеству поглощенной энергии dQ. До входа в слой плотность потока энергии была $I(x)$, после выхода из слоя стала $I(x+dx)$, поэтому

$$I(x) - I(x+dx) = I\sigma N\,dx. \tag{14.1}$$

Замечая, что $I(x+dx) - I(x) = dI$, получаем из (14.1)

$$\frac{dI}{dx} = -IN\sigma.$$

Решение этого уравнения

$$I = I_0 e^{-\sigma N x}. \tag{14.2}$$

Это решение получается совершенно таким же способом, как и решение $N = N_0 e^{-\omega t}$ при рассмотрении радиоактивного распада (см. § 3). Здесь I_0 есть значение величины I при $x = 0$.

При увеличении толщины слоя в арифметической прогрессии $x_1 = a$, $x_2 = 2a$, $x_3 = 3a$ и т. д. сила света уменьшается в геометрической прогрессии. В самом деле, обозначая $e^{-\sigma Na} = \alpha$ (тогда $\alpha < 1$), найдем, пользуясь (14.2),

$$I(x_1) = I_0\alpha,\ I(x_2) = I_0\alpha^2,\ I(x_3) = I_0\alpha^3 \text{ и т. д.}$$

§ 15. Соотношение между точным и грубым расчетами

Весьма поучительно теперь, располагая и точным решением (§ 14) и грубой оценкой (§ 13), сравнить их. Такое сравнение помогает пользоваться грубыми оценками в сложных задачах, где точное решение найти трудно; сравнение помогает понять границы применимости грубого решения.

При грубом решении мы нашли длину, на которой происходит значительное поглощение,

$$L = \frac{1}{N\sigma}.$$

При помощи величины L точное решение (14.2) можно выразить так:

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{L}}. \tag{15.1}$$

Значит, полностью подтверждается предположение, что найденная грубым рассуждением величина L входит в точное решение.

Точное решение действительно имеет вид

$$I = I_0 f\left(\frac{x}{L}\right).$$

Из точного решения (15.1) находим конкретный вид функции $f\left(\frac{x}{L}\right)$. Действительно, $f\left(\frac{x}{L}\right) = e^{-\frac{x}{L}}$.

Рассмотрим длину $x = L$. Грубое рассуждение давало на этой длине полное поглощение света. На самом деле из точного решения (15.1), полагая в нем $x = L$, находим $I = I_0 e^{-1} = 0{,}37\, I_0$, т. е. проходит 37% света, а поглощается, следовательно, 63%. При малых $\frac{x}{L}$ выразим $e^{-\frac{x}{L}}$ по

формуле Маклорена, ограничиваясь двумя членами. Получим:

$$e^{-\frac{x}{L}} \approx 1 - \frac{x}{L}. \qquad (15.2)$$

Геометрически это соответствует замене кривой на касательную к кривой при $x = 0$ (рис. 127). Как видно из (15.2), касательная пересекает ось x при $x = L$. Поэтому если бы поглощение происходило с одинаковой скоростью, т. е. так, что на каждой единице длины поглощалось бы одинаковое количество света, то весь свет был бы поглощен на длине $x = L$.

Рис. 127.

Таким образом, величина L, полученная грубым рассуждением, действительно, имеет важнейшее значение и в точном решении.

Вопрос о грубых решениях очень важен в практической работе, и надо всячески развивать умение быстро находить грубые решения, тренироваться в их нахождении и понимании; это гораздо важнее и плодотворнее злорадного подчеркивания недостатков грубых решений. Будем радоваться тому, что грубое решение дает 100% поглощения там, где точное решение дает 63% поглощения — ошибка всего в 1,5 раза. Грубое решение дает при $x = L$ 0% прохождения света вместо точного значения 37%; но это не беда, так как заранее было понятно, что здесь от грубого решения нельзя ждать хорошей точности.

Если установлено, что задача не имеет точного решения в виде явной формулы, то на этом никак нельзя останавливаться. Надо отыскивать хотя бы очень грубое решение задачи. Однако при пользовании им всегда следует помнить, что это не точное, а только грубое, приближенное решение.

Остановимся еще на вопросе о размерностях. Размерность величины $L = 1/N\sigma$ мы проверили и установили, что это длина. Часто оказывается возможным найти приближенное выражение интересующей нас величины, зная только ее размерность и размерность исходных величин, входящих в условие задачи. Однако в данном случае это невозможно. Действительно, величину, имеющую размерность длины, можно построить, исходя из одной только концентрации

$N\left(\frac{1}{см^3}\right): l_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$. Величина l_1 представляет собой среднее расстояние между частицами. Величину, имеющую размерность длины, можно построить также из сечения $\sigma\,(см^2): l_2 = \sqrt{\sigma}$; величина l_2 характеризует размер частицы. Очевидно, что величина $l_\alpha = l_1^\alpha l_2^{1-\alpha}$ при любом значении показателя степени α также имеет размерность длины. В частности, интересующая нас величина L получается при $\alpha = 3$. Таким образом, в рассмотренной задаче теория размерности не приводит к определенному ответу. Для того чтобы найти L, т. е. величину размерности длины, входящую в точное решение, оказывается необходимым найти именно грубое решение задачи. Формальное применение теории размерности здесь не приводит к цели, не даёт однозначного ответа. Но даже в тех случаях, когда соображения размерности дают единственный ответ на вопрос, желательно также найти грубое решение задачи, чтобы яснее представить картину явления.

§ 16. Эффективное сечение

В задаче об ослаблении света, проходящего через воздух с пылью, величина σ имеет простой геометрический смысл площади тени одной пылинки. Закон ослабления света (14.2) одинаков для света различной длины волны (т. е. разного цвета), так как величина σ от длины волны не зависит.

При поглощении света отдельными молекулами и атомами наблюдается сильная зависимость закона ослабления света от длины волны света. Так, например, в чистом воздухе видимый свет практически совершенно не ослабляется (ослабление составляет меньше 1% на пути в 1 *км*, соответственно ослабление в e раз происходит на пути около 100 *км*). Ультрафиолетовые лучи с длиной волны $1800\cdot10^{-8}$ *см* $=$ $= 1{,}8\cdot10^{-5}$ *см* $= 1800$ Å*) ослабляются в e раз на пути $L = 0{,}1$ *см*. Еще более короткие ультрафиолетовые лучи, с длиной волны $1{,}1\cdot10^{-5}$ *см* $= 1100$ Å, ослабляются в e раз на пути $L = 0{,}01$ *см*.

Следовательно, поглощение света воздухом не похоже на поглощение света черной пылинкой, одинаково поглощающей свет с любой длиной волны.

*) Å — ангстрем, 1 Å $= 10^{-8}$ *см*.

Количество световой энергии q, поглощаемое одним атомом в единицу времени, пропорционально плотности потока световой энергии I в том месте, где находится атом,

$$q = \sigma I. \qquad (16.1)$$

Здесь σ есть коэффициент пропорциональности. Определим размерность σ. Размерность q есть *эрг/сек*. Размерность потока энергии I есть *эрг/см²сек*. Следовательно, размерность σ есть *см²*. Величина σ называется эффективным сечением. Для черной пылинки коэффициент σ совпадает с геометрической величиной — площадью тени. Для молекул и атомов σ сильно зависит от длины волны света.

Грубо можно так представить себе причину этой зависимости. Количество поглощаемой атомом энергии при воздействии на него света оказывается особенно большим, когда частота световых колебаний совпадает с частотой движения электронов в атоме. При этом имеет место явление резонанса, электрон колеблется особенно сильно и поглощает особенно много световой энергии.

Такой резонанс достигается, например, при поглощении атомами натрия (в парообразном состоянии) желтого света длиной волны $5890\,\text{Å} = 5{,}89 \cdot 10^{-5}$ *см*. Точно такой же желтый свет испускают атомы натрия при более высокой температуре, когда колебание электронов вызывается сильными столкновениями атомов между собой.

При резонансе величина σ достигает 10^{-10} *см²*. Размеры атомов и молекул порядка 10^{-8}—10^{-7} *см*, что соответствует сечениям порядка 10^{-16}—10^{-14} *см²*.

Таким образом, максимальные эффективные сечения во много раз больше истинных площадей сечений атомов и молекул. С другой стороны, для света, частота которого не соответствует собственной частоте атома, эффективное сечение мало, гораздо меньше площади сечения атома.

§ 17. Ослабление потока заряженных частиц α- и β-лучей

Показательный закон убывания потока частиц в зависимости от пройденного пути

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{L}} \qquad (17.1)$$

основан на очень общем предположении, что ослабление

потока на малом пути dx пропорционально самой интенсивности потока

$$\frac{dI}{dx}=-\frac{1}{L}I, \tag{17.2}$$

где коэффициент пропорциональности $\frac{1}{L}$ есть постоянное число, зависящее только от вида частиц.

Решение уравнения (17.2) есть

$$I=I_0e^{-\frac{x}{L}}.$$

Поэтому формулы (17.1) и (17.2) равноценны, одна следует из другой.

Опыты показывают, что в некоторых случаях показательный закон (17.1) является вполне точным, а иногда от него наблюдаются отклонения. Рассмотрим внимательно те причины, которые могут вызвать отклонение от формулы (17.1) или (что то же самое) от формулы (17.2)

Легко ответить на вопрос о смысле отклонений от формулы (17.2). Формула (17.2) подразумевает, что при изменении x и изменении I рассматриваемый свет (или другое какое-нибудь излучение) качественно не изменяется, иначе изменялось бы число L. Перепишем (17.2) в виде

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dx}=-\frac{1}{L}.$$

Отсюда видно, что величина $\frac{1}{I}\frac{dI}{dx}$ постоянна. Если окажется, что в различных точках пространства величина $\frac{1}{I}\frac{dI}{dx}$ различна, значит, в этих точках различна не только интенсивность излучения, но различно и его физическое содержание, например свет разного цвета, т. е. с неодинаковой средней длиной волны.

При рассмотрении вопросов защиты от радиоактивных излучений и вопросов прохождения α-, β- и γ-лучей и нейтронов через различные вещества мы встречаемся с другой причиной отклонений от простого закона (17.2).

В применении к процессу поглощения света закон (17.2) означает следующее: если свет встретил на своем пути пылинку, то часть света проходит мимо этой пылинки, совсем

не изменяясь, а другая часть света целиком поглощается пылинкой. В случае радиоактивных излучений дело обстоит сложнее: α-частица представляет собой ядро атома гелия, вылетающее из радиоактивного «родительского» ядра с большой скоростью, порядка 0,07 c (где c — скорость света), т. е. со скоростью около $2 \cdot 10^9$ *см/сек*. Пролетая через атом, α-частица отдает электронам малую часть своей энергии. После примерно 50 000 столкновений с атомами α-частица потеряет половину своей энергии. При этом она не перестанет существовать, не исчезнет, но энергия и скорость ее изменятся. После 100 000 столкновений α-частица останавливается, перестает сталкиваться с атомами и выбивать из них электроны. Такое число столкновений α-частица испытывает в воздухе на пути в несколько сантиметров.

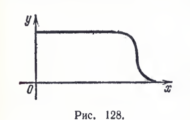


Рис. 128.

В действительности на этом пути различные α-частицы (одинаковой начальной энергии) испытывают разное число столкновений, не обязательно в точности 100 000. Однако, так как 100 000 — это большое число, то на данной длине пути отклонения числа столкновений отдельных α-частиц от среднего (100 000) невелики (порядка 300, т. е. около 0,3% среднего числа столкновений). Поэтому α-частицы одинаковой энергии всегда теряют всю свою энергию приблизительно на одинаковом пути. Величина этого пути зависит от начальной энергии α-частицы. Если поток α-частиц одинаковой энергии летит вдоль оси x, то зависимость между интенсивностью потока и величиной пройденного пути x изображается кривой рис. 128. Кривая эта совершенно не похожа на график показательной функции. На протяжении значительной части пути интенсивность потока α-частиц не меняется: за одинаковые промежутки времени через площадку в 1 $см^2$ пролетает одинаковое число α-частиц. Затем интенсивность резко падает. Это резкое падение было подготовлено на участке, где интенсивность оставалась постоянной, потому что на этом участке энергия α-частиц уменьшалась с увеличением пути x. Резкое падение потока происходит там, где энергия α-частиц становится весьма малой.

Аналогичная картина имеет место и для быстрых электронов (β-частиц, испускаемых, когда в ядре нейтрон превращается в протон). В этом случае картина осложняется тем, что при радиоактивном распаде испускаются электроны с различными скоростями, и к тому же электроны, пролетая около атома, не только отдают ему часть своей энергии, но часто испытывают и значительное боковое отклонение.

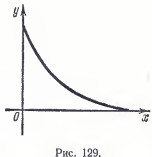


Рис. 129.

Кривая для β-частиц имеет вид, показанный на рис. 129. Уже при небольших x часть электронов выбывает из пучка; это в основном те электроны, которые имели малую начальную скорость. Поэтому вблизи $x = 0$ поведение кривой похоже на поведение показательной функции. Однако дальше кривая достигает оси абсцисс, интенсивность I становится равной нулю при вполне определенной величине x, соответствующей максимальной энергии электронов, получающихся при данном радиоактивном распаде.

Наиболее важными для практики (и вместе с тем наиболее трудными) являются вопросы, связанные с защитой от γ-лучей, испускаемых радиоактивными веществами, и от нейтронов, образующихся при делении ядер в атомных реакторах (котлах) и при ядерных взрывах. В этом случае положение наиболее запутанное и сложное, так как γ-лучи и нейтроны отдают энергию большими порциями и при этом сильно отклоняются от первоначального направления. Даже в толстом слое воздуха (100—200 *м*) есть значительная вероятность (порядка 37%) прохождения неизменных γ-лучей и нейтронов. Поэтому они требуют толстых защитных слоев. Поток γ-лучей и нейтронов не обращается в нуль при определенной толщине слоя, как это имеет место для α- и β-лучей; при большой толщине защитного слоя, как показывают опыт и сложные расчеты, поток γ-лучей и нейтронов убывает приблизительно по показательному закону.

ГЛАВА VI
МЕХАНИКА

§ 1. Сила, работа, мощность

Соотношения между важнейшими велнчинами механнки можно точно сформулировать только при помощи интегралов и производных. В главе I мы уже рассматривали соотношение между пройденным путем (или положением) тела, его скоростью, а также между скоростью и ускорением. Не повторяя этого, рассмотрим теперь соотношення между такими величинами, как сила, работа, энергия, мощность. Рассмотрим прямолинейное движение тела вдоль оси x. Пусть сила F, действующая на тело, также направлена вдоль оси x. В элементарной физике работа A, совершенная силой, определяется как произведение силы F на пройденный телом путь $l=x_k-x_n$, где x_n — начальное положение тела, x_k — конечное положение тела:

$$A=Fl=F(x_k-x_n).$$

Очевидно, здесь имеет место такое же положение, как и в случае соотношения между скоростью н путем: простая формула — работа равна произведению силы на путь — имеет место лишь в том случае, когда снла постоянна. Если же сила меняется на протяженин процесса перемещения, тогда надо весь процесс перемещения разбить на отдельные малые промежутки так, чтобы на протяжении каждого малого промежутка силу можно было считать постоянной. Тогда для малого промежутка

$$\Delta A_i=F_i\Delta x_i=F_i(x_{i+1}-x_i).$$

Значит, в общем случае переменной силы работа выражается

не произведением, а интегралом

$$A=\int_{x_n}^{x_k} F\,dx.$$

Мы считаем известным движение тела, которое задается известной функцией $x=x(t)$. Перемещение тела за малое время dt равно произведению мгновенной скорости v на время dt

$$dx=v\,dt=\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Поэтому выражение работы можно написать и так:

$$A=\int_{t_n}^{t_k} F\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{t_n}^{t_k} Fv\,dt. \qquad (1.1)$$

Произведение Fv, которое входит в эту формулу, есть работа, произведенная в единицу времени; оно называется мощностью силы. Действительно, в случае постоянных скорости и силы путь равен $x=vt$, работа равна $A=Fx=Fvt$ и отношение работы к протекшему времени равно $\frac{A}{t}=Fv$. Обозначая мощность через W, $Fv=W$, можно написать:

$$A=\int_{t_n}^{t_k} W\,dt.$$

Напомним, что в технической системе единиц сила измеряется килограммами*) (т. е. за единицу силы принимается сила, с которой масса в 1 *кг* притягивается к Земле), длина — метрами, единица работы — килограммометрами (*кГм*), единица мощности — килограммометрами в секунду (*кГм/сек*); часто пользуются также другой единицей мощности — так называемой лошадиной силой, равной 75 *кГм/сек*.

В физической системе единиц сила измеряется в динах (сила, придающая массе 1 *г* ускорение 1 *см/сек*^{2}), работа — в эргах (1 *эрг* = 1 *дин*·1 *см*), мощность — в *эрг/сек*, и вводят также единицу работы — джоуль, равную 10^7 *эрг*, и единицу мощности — ватт, равную *дж/сек* = 10^7 *эрг/сек*.

*) Обозначается *кГ*.

На тело могут действовать несколько сил, например, F_1 и F_2; тогда можно говорить о работе, которую совершила первая сила (A_1) и вторая сила (A_2) за то время, когда тело переместилось из начального положения x_n в конечное положение x_k. Считая, что силы F_1 и F_2 — постоянные, получим:

$$A_1 = (x_k - x_n) F_1, \quad A_2 = (x_k - x_n) F_2.$$

Обратим внимание на знаки величин, входящих в эти выражения. Сила считается положительной, когда она действует в сторону возрастания x, т. е. в сторону, показанную стрелкой на оси x (рис. 130) вправо. Сила, действующая в противоположную сторону — влево, считается отрицательной.

Рис. 130.

Если тело перемещается в ту же сторону, в которую действует сила, то работа силы положительна. Представим себе, что тело движется в направлении, противоположном направлению силы, так что F_1 и $(x_k - x_n)$ имеют разные знаки; тогда работа силы A_1 окажется отрицательной. Представим себе, например, что на тело действуют две силы (рис. 131, *а*): сила растянутой пружины F_1 и сила натяжения веревки F_2, которую Вы, читатель, натягиваете рукой. F_1 тянет влево, $F_1 < 0$; Вы тянете вправо, $F_2 > 0$. Если Вы тянете сильнее пружины*), то тело будет перемещаться слева направо. На рис. 131, *а* показано начальное положение тела, а на рис. 131, *б* — его конечное положение: $(x_k - x_n) > 0$, $F_1 < 0$. Работа A_1, совершенная над телом

Рис. 131.

*) Математически это означает, что абсолютная величина силы, с которой Вы тянете, больше абсолютной величины силы, с которой тянет тело влево пружина: $|F_2| > |F_1|$.

силой натяжения пружины, или, короче, работа пружины, при этом перемещении отрицательна. В этом случае работа, которую Вы произвели, положительна, $A_2 > 0$. Полная работа, совершенная над телом, $A = A_2 + A_1$, также положительна. Но $A < A_2$, так как $A_1 < 0$. Это значит, что только часть произведенной Вами работы (A) воспринята телом, другая часть ($|A_1|$) пошла на растяжение пружины. Отметим, что сила трения о неподвижную поверхность направлена всегда в сторону, противоположную скорости движения тела; поэтому работа силы трения о неподвижную поверхность всегда отрицательна независимо от направления движения тела.

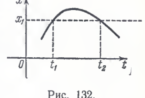


Рис. 132.

Сила F_1, действующая на тело со стороны пружины, другой конец которой закреплен, отличается весьма важным свойством: эта сила зависит исключительно от положения тела. Вовсе не все силы обладают таким свойством; например, сила трения о неподвижную поверхность всегда тормозит движение тела; она направлена влево, если тело движется вправо, и направлена вправо, если тело движется влево. Поэтому направление силы трения зависит от направления движения тела. Кроме того, сила трения может зависеть от величины скорости тела. Следовательно, сила трения зависит от величины и направления скорости тела.

Сила F_2, с которой Вы тянете веревку в примере рис. 131, *а* и *б*, может меняться любым образом, по Вашему произволу. В частности, тело может двигаться сначала направо, а потом налево. При этом тело дважды будет проходить одно и то же положение: первый раз на пути вперед в момент t_1, второй раз на обратном пути в момент t_2.

Возможный график движения тела, т. е. зависимость координаты x от времени t, показан для этого случая на рис. 132. В нашей воле в момент t_1 тянуть тело вправо, $F_2(t_1) > 0$, а в момент t_2 отпустить трос, так что $F_2(t_2) = 0$, или даже толкать тело влево, так что $F_2(t_2) < 0$. Но $x(t_1) = x(t_2) = x_1$, значит, произвольную силу F_2 нельзя, вообще говоря, рассматривать как функцию координаты x.

Приведенные примеры силы трения и силы, приложенной человеком, действующим по своей воле, служат для того,

чтобы показать, что зависимость силы только от положения тела $F_1 = F_1(x)$, характерная для силы F_1, с которой пружина действует на тело, не есть общее свойство любых сил, а есть частное свойство, связанное с упругостью пружины.

Для того чтобы найти работу данной силы F_i по одной из формул $A_i = \int\limits_{x_n}^{x_k} F_i\,dx$; $A_i = \int\limits_{t_n}^{t_k} F_i v\,dt$, нужно знать две вещи: 1) как двигалось тело, т. е. зависимость координаты тела от времени $x(t)$, и 2) выражение силы F_i, которая в общем случае зависит от x, t, v.

Зная зависимости $x(t)$ и $v(t)$ и подставляя их в выражение $F_i(x;\ t;\ v)$, получим выражение для F_i в виде функции времени и сможем записать работу как интеграл по времени.

Пример. Пусть сила $F(x) = -kx$, а движение тела задано уравнением $x = b\sin\omega t$; тогда

$$v = \frac{dx}{dt} = b\omega\cos\omega t, \quad F(x(t)) = -kx(t) = -kb\sin\omega t,$$

$$A_i = -b^2k\omega\int\limits_{t_n}^{t_k}\sin\omega t\cos\omega t\,dt = \frac{-b^2k\omega}{2}\int\limits_{t_n}^{t_k}\sin 2\omega t\,dt =$$

$$= +\frac{b^2k}{4}\cos 2\omega t\,\Big|_{t_n}^{t_k} = \frac{b^2k}{4}(\cos 2\omega t_k - \cos 2\omega t_n). \qquad (1.2)$$

В этом случае, когда сила зависит только от координаты, гораздо проще и удобнее пользоваться выражением работы как интеграла по x

$$A = \int\limits_{x_n}^{x_k} F(x)\,dx = -k\int\limits_{x_n}^{x_k} x\,dx = \frac{-kx^2}{2}\Big|_{x_n}^{x_k} = \frac{kx_n^2}{2} - \frac{kx_k^2}{2}.$$

Подставляя сюда $x = b\sin\omega t$, легко получить и выражение работы в течение заданного промежутка времени от t_n до t_k

$$A = \frac{kb^2\sin^2\omega t_n}{2} - \frac{kb^2\sin^2\omega t_k}{2}. \qquad (1.3)$$

Легко убедиться в том, что выражение в точности совпадает

с предыдущим, так как

$$\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = 1 - 2 \sin^2 \omega t,$$

$$\cos 2\omega t_k - \cos 2\omega t_n = 1 - 2 \sin^2 \omega t_k - (1 - 2 \sin^2 \omega t_n) = \\ = 2(\sin^2 \omega t_n - \sin^2 \omega t_k).$$

Подставляя это тождество в (1.2), получим (1.3).

При пользовании выражением работы как интеграла по координате x в общем случае силы $F(x, v, t)$, зависящей от x, v, t, нужна большая осторожность. В самом деле, в принципе, если задано движение, $x = x(t)$, то это уравнение можно решить относительно t и определить $t(x)$. Однако надо иметь в виду, что t может быть неоднозначной функцией x, одно и то же положение x возможно в два различных момента времени, т. е. для одного и того же значения x получаем два различных значения t (см. рис. 132). Тогда все движение надо разбить на отдельные периоды, во время которых скорость не меняет своего знака и t является однозначной функцией x. Однако для разных периодов t выражается различными функциями x. Пусть, например, тело движется по закону $x = b \sin \omega t$, как и в предыдущем примере, но сила задана как функция времени $F = f \cos \omega t$. При этом сила не является однозначной функцией положения x. Действительно, пусть, например, $t = 0$. Тогда $x = 0$, $F = f$. Если положить $t = \frac{\pi}{\omega}$, то снова $x = 0$, но при этом $F = -f$, так что в различные моменты времени $\left(t = 0 \text{ и } t = \frac{\pi}{\omega}\right)$ тело находится в одинаковом положении $x = 0$, но сила при этом различна. При интегрировании по времени этой трудности нет: каждому моменту t отвечает одно определенное значение координаты x, силы F и всех других величин.

Легко найти работу, интегрируя по времени,

$$A = \int_{t_n}^{t_k} Fv\,dt = \int_{t_n}^{t_k} f \cos \omega t\, b\omega \cos \omega t\,dt = fb\omega \int_{t_n}^{t_k} \cos^2 \omega t\,dt.$$

Воспользуемся приведенной выше тригонометрической формулой

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1.$$

Отсюда

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2},$$

поэтому

$$A = fb\omega \int_{t_n}^{t_k} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega t}{2}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{2} fb\omega (t_k - t_n) + \frac{fb}{4} (\sin 2\omega t_k - \sin 2\omega t_n). \qquad (1.4)$$

С течением времени работа неограниченно возрастает, как видно из формулы (1.4). Это объясняется тем, что сила и колебания находятся в резонансе (подробно явление резонанса будет рассмотрено в § 11).

Движение по закону $x = b \sin \omega t$ представляет собой колебание тела; рассмотрим работу силы за один полупериод, выбрав начальный момент $t_n = 0$, $x_n = 0$ и конечный момент $t_k = \frac{\pi}{\omega}$, $\sin \omega t_k = \sin \pi = 0$, $x_k = 0$. Тогда в (1.4) $\sin 2\omega t_k = \sin 2\omega t_n = 0$ и работа равна

$$A = \frac{1}{2} fb\omega \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} fb. \qquad (1.5)$$

Тело вернулось в исходное состояние, а работа, произведенная силой, не равна нулю, имеет вполне определенную величину. Как понять этот результат с точки зрения первой формулы $A = \int_{x_n}^{x_k} F\,dx$? На первый взгляд, если подставить $x_n = x_k = 0$, получим:

$$A = \int_0^0 F\,dx = 0.$$

В действительности мы должны рассмотреть отдельно процесс нарастания x от 0 до $x_{max} = b$ и процесс убывания x от $x_{max} = b$ до 0. В процессе нарастания каждому значению x соответствует определенное значение силы F, которое обозначим F_i,

$$F_1 = f \cos \omega t = f\sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = f\sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2} > 0.$$

Во время убывания x тем же положительным значениям x соответствует отрицательное значение силы*). Эту силу обозначим F_2:

$$F_2(x) = -f\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}.$$

Таким образом, интеграл с путем x в качестве переменной интегрирования распадается на два:

$$A = \int_0^b F_1(x)\,dx + \int_b^0 F_2(x)\,dx. \qquad (1.6)$$

Эти два интеграла нельзя сложить по формуле

$$\int_a^b \varphi\,dx + \int_b^c \varphi\,dx = \int_a^c \varphi\,dx,$$

так как подынтегральная функция в двух интегралах в (1.6) хотя и имеет одинаковый смысл (сила), но выражается *разными* формулами. Получается это потому, что F задана как функция t, а t выражается через x различными формулами при возрастании x от 0 до b и при убывании x от b до 0. В данном случае $F_2(x) = -F_1(x)$. Подставляя выражения для $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в (1.6), получим:

$$A = f\int_0^b \sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}\,dx - f\int_b^0 \sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}\,dx.$$

Во втором интеграле можно переставить пределы интегрирования, причем меняется знак, поэтому получим:

$$A = 2f\int_0^b \sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}\,dx. \qquad (1.7)$$

*) Равенство $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$ правильно при любых значениях ωt. Из него следует $\cos\omega t = \pm\sqrt{1-\sin^2\omega t}$, а вот знак перед корнем зависит от того, какова величина ωt. Легко убедиться, что при $-\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2}$ надо брать плюс, а при $\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{3\pi}{2}$ надо брать минус, что и сделано выше.

Обозначая $z=\frac{x}{b}$, $dx=b\,dz$, найдем:

$$A=2bf\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\,dz.$$

Интеграл $I=\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\,dz=\frac{\pi}{4}$ (площадь четверти круга радиуса 1). Поэтому из (1.7) получаем:

$$A=2bf\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}bf,$$

что совпадает с формулой (1.5), полученной интегрированием по времени.

Таким образом, в случае силы, зависящей от времени и могущей принимать разные значения при одинаковом значении x, работа A также не является однозначной функцией x. В приведенном примере колебательного движения $F=f\cos\omega t$, $x=b\sin\omega t$ с течением времени x снова и снова проходят одни и те же значения, а работа, произведенная силой, все увеличивается и увеличивается (при положительном f).

Если сила зависит от скорости (как это имеет место для силы трения), положение будет похожим: тело может вернуться в исходное положение, но работа силы не равна нулю. В случае силы трения работа отрицательна (см. упражнения).

Упражнения

1. Найти выражение в виде интеграла для работы силы трения, пропорциональной скорости движения тела и направленной в противоположную сторону $F=-hv$, $h>0$. Показать, что работа отрицательна.

2. Сила трения постоянна по величине и направлена в сторону, противоположную скорости, т. е.

$$F=\begin{cases}-h, & \text{если } v>0,\\ +h, & \text{если } v<0.\end{cases}$$

Тело движется по закону $x=b\sin\omega t$. Найти работу силы трения за время от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{\omega}$.

3. Сила, действующая на тело, задана формулой $F=f_0\sin\omega_0 t$, f_0 — постоянная. Ввиду того, что на тело действуют также и другие

силы, оно движется по закону $x=b\sin\omega_1 t$. Определить работу силы F за время от $t=0$ до $t=t_k$. Рассмотреть случай $\omega_0=\omega_1$.

4. Тело падает по закону $x=\frac{gt^2}{2}$ (ось x направлена вниз). Найти формулу для работы силы сопротивления воздуха $F=-aS\rho\frac{v^2}{2}$, где a — коэффициент пропорциональности, зависящий от формы тела (он может изменяться от 0,1 до 1), S — площадь поперечного сечения тела в $см^2$, ρ — плотность воздуха ($1{,}3\cdot 10^{-3}$ $г/см^3$), v — скорость падения тела в $см/сек$. Найти также формулу для работы силы тяжести $F=mg$, m — масса тела.

Произвести вычисления и сравнить результаты для деревянного шарика диаметром 1 $см$, $a=0{,}8$ и для стальной пули длиной 3 $см$, диаметром 0,7 $см$, $a=0{,}2$, для $t=1$ $сек$, 10 $сек$, 100 $сек$.

Замечание. Смысл расчета состоит в том, что мы предполагаем, что сила сопротивления воздуха мала по сравнению с силой тяжести и заметно не меняет закон свободного падения тела. Подсчитывая работу силы сопротивления воздуха и сравнивая ее с работой силы тяжести, проверяем правильность исходного предположения о малой роли силы сопротивления воздуха. Точное решение задачи о падении тела с учетом сопротивления воздуха будет дано в § 7.

5. Ветер, дующий со скоростью v_0, действует на парус с силой, равной

$$F=\begin{cases} +aS\rho\frac{(v_0-v)^2}{2} & \text{при } v<v_0,\\ -aS\rho\frac{(v_0-v)^2}{2} & \text{при } v>v_0,\end{cases}$$

где v — скорость движения судна, S — площадь паруса, ρ — плотность воздуха, a — безразмерный коэффициент (для паруса, поставленного перпендикулярно к направлению ветра, $a\approx 1$). Найти работу силы ветра при перемещении судна на b метров. Найти мощность силы ветра. Движение судна считать равномерным с постоянной скоростью v. Выяснить зависимость работы и мощности от величины v. Найти максимальную мощность при $v_0=30$ $м/сек$, $a=1$, $S=10\times 10$ $м^2$ и выразить ее в лошадиных силах.

6. Тело движется по закону $x=c\cos(\omega t+\alpha)$ под действием силы $F=f\cos\omega t$. Найти работу силы за время от $t=t_n$ до $t=t_k$. Получить работу силы за один период ее действия $\left(\text{от } t=0 \text{ до } t=\frac{2\pi}{\omega}\right)$. Найти среднюю мощность силы.

§ 2. Энергия

Рассмотрим случай силы, которая зависит только от положения (координаты) тела, $F=F(x)$. Как отмечалось выше, примером силы такого рода является сила, с которой на тело действует пружина, второй конец которой закреплен

неподвижно*). В таком случае выражение $A=\int\limits_{x_n}^{x_k} F\,dx$ можно применять без каких-либо осложнений (сравните с предыдущим параграфом). В частности, в этом случае, если тело двигалось сперва в одну сторону от x_n до x_m, а потом в противоположную и вернулось в начальное положение, то $x_k=x_n$, полная работа силы действительно равна нулю

$$A=\int\limits_{x_n}^{x_k=x_n} F(x)\,dx=0.$$

Разбиение пути на участки только подтверждает этот вывод

$$A=\int\limits_{x_n}^{x_m} F\,dx+\int\limits_{x_m}^{x_k} F\,dx=\int\limits_{x_n}^{x_m} F\,dx-\int\limits_{x_k}^{x_m} F\,dx,$$

и при $x_k=x_n$ $A=0$.

В механике *потенциальная энергия* определяется как способность произвести работу. Пружина обладает определенным запасом потенциальной энергии, зависящим от того, насколько она растянута или сжата. При неподвижном положении одного закрепленного конца потенциальная энергия пружины зависит от положения тела, к которому прикреплен подвижной конец пружины. Таким образом, потенциальная энергия $u=u(x)$ есть функция координаты x. Если в начальном положении потенциальная энергия равна $u(x_n)$, то после перемещения тела в положение x_k, когда пружина совершила работу A, равную

$$A=\int\limits_{x_n}^{x_k} F(x)\,dx,$$

оставшаяся потенциальная энергия равна $u(x_n)-A$. Таким образом,

$$u(x_k)=u(x_n)-A=u(x_n)-\int\limits_{x_n}^{x_k} F(x)\,dx. \tag{2.1}$$

---

*) Если второй конец пружины может перемещаться по произволу, то сила, действующая на тело, будет зависеть не только от положения тела, но и от положения второго конца пружины, а следовательно, не удовлетворяет сформулированному условию.

Надо полностью прочувствовать знак при A в этом выражении: если пружина совершает работу, то запас способности пружины совершать работу при этом уменьшается! Произведенная пружиной работа черпается из запаса потенциальной энергии. Поэтому произведенная работа (то, что отдала пружина) равна разности начальной и конечной энергии пружины:

$$A = u(x_n) - u(x_k).$$

Во все формулы входит разность величин потенциальной энергии в двух положениях тела. Поэтому если заменить $u(x)$ на $u(x)+C$, где C — любая постоянная величина, то это ничего не изменит в физических результатах. Действительно,

$$[u(x_n)+C] - [u(x_k)+C] = u(x_n) - u(x_k).$$

Значение $u(x)$ в какой-то данной точке — обозначим ее x_0 — можно выбрать произвольно. Обозначим его u_0. После этого в любой другой точке x значение функции $u(x)$ определяется по формуле (2.1), если в ней положить $x_n = x_0$, $x_k = x$,

$$u(x) = u_0 - \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx. \qquad (2.2)$$

Таким образом решается задача об определении потенциальной энергии по заданной силе.

Можно поставить обратную задачу: зная потенциальную энергию как функцию x, $u(x)$, найти силу $F(x)$. Для решения этой задачи возьмем производную от обеих частей равенства (2.2). Производная от интеграла равна подынтегральной функции, так что

$$\frac{du(x)}{dx} = -F(x).$$

Знак минус здесь весьма существен. Сила положительна, направлена в сторону увеличения x в том случае, если $\frac{du}{dx}$ отрицательна, т. е. если при увеличении x потенциальная энергия u уменьшается. Сила отрицательна (направлена в сторону уменьшения x), если $\frac{du}{dx} > 0$, т. е. в том случае,

когда при увеличении x энергия u увеличивается; в этом случае, очевидно, при уменьшении x энергия u также уменьшается. Значит, сила направлена всегда в ту сторону, при движении в которую потенциальная энергия уменьшается.

Рассмотрим подробнее пример пружины. Пусть в ненатянутом состоянии пружины тело находится в начале координат (рис. 133). При оттягивании тела вправо сила пропорциональна тому расстоянию, на которое оттянуто тело, и направлена влево

$$F = -kx, \quad k > 0.$$

Положим при $x_0 = 0$ $u_0 = 0$, т. е. примем потенциальную энергию ненатянутой пружины за нуль. Получим:

$$u(x) = -\int_0^x F\,dx = k\int_0^x x\,dx = k\frac{x^2}{2}.$$

Легко убедиться, что этому $u(x)$ соответствует по формуле

$$F = -\frac{du}{dx} \text{ сила } F = -\frac{d}{dx}\left(k\frac{x^2}{2}\right) = -kx.$$

Рассмотрим второй пример: силу тяжести. Направим ось z вверх. Сила тяжести, действующая вниз, равна $-mg$, где g — ускорение силы тяжести. Она не зависит от высоты z, но ведь постоянная величина есть частный случай функции. Важно то, что сила тяжести не зависит от времени и скорости. Поэтому можно применить полученные выше формулы. Примем за нуль потенциальную энергию тела на уровне Земли при $z = 0$. Тогда

Рис. 133.

$$u(z) = -\int_0^z F\,dz = -\int_0^z (-mg)\,dz = mgz. \qquad (2.3)$$

Потенциальная энергия линейно растет с увеличением высоты тела над поверхностью Земли.

В предыдущем примере мы предполагали, что расстояние z мало по сравнению с радиусом Земли. Будем теперь рассматривать снова силу притяжения, считая, что расстояния

могут быть сколь угодно большими. По закону тяготения Ньютона сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния от притягивающей массы. Известно, что для тела, находящегося над поверхностью Земли, сила притяжения ко всему земному шару равна силе притяжения к массе, равной массе Земли и сосредоточенной в центре Земли*). Удобно поэтому расстояние отсчитывать от центра Земли. Обозначим его r. Итак, сила, действующая на тело, равна

$$F=-\frac{C}{r^2}.$$

Подразумевается, что константа C положительна. Сила отрицательна, так как она направлена к центру Земли, а координата r растет при удалении от Земли — сила действует в сторону уменьшения r.

Константу C легко определить из того условия, что сила, действующая на поверхности Земли ($r=r_0=6400$ *км* $=6{,}4\cdot 10^8$ *см*), нам хорошо известна

$$F(r_0)=-mg=-\frac{C}{r_0^2},\quad C=mgr_0^2, \tag{2.4}$$

где g есть ускорение силы тяжести именно на поверхности Земли, $g=981$ *см/сек*^{2}. Окончательно

$$F=-\frac{mgr_0^2}{r^2}.$$

Примем снова за нуль потенциальную энергию тела на уровне Земли. Тогда

$$\begin{aligned} u &= -\int_{r_0}^{r} F\,dr = mgr_0^2\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = mgr_0^2\left(-\frac{1}{r}\Big|_{r_0}^{r}\right) = \\ &= mgr_0^2\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right) = mg\left(r_0-\frac{r_0^2}{r}\right) = \\ &= mg\frac{r_0}{r}(r-r_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

*) Для тела, находящегося внутри Земли, это несправедливо. В этом случае при расчете силы надо учитывать только ту часть массы, которая ближе к центру Земли, чем рассматриваемое тело.

При малой высоте $z=r-r_0 \ll r_0$, $\frac{r_0}{r}$ мало отличается от единицы и приблизительно

$$u(r)=mg(r-r_0)=mgz,$$

что совпадает с формулой (2.3), полученной раньше. Однако при увеличении r, как видно из формулы (2.5), потенциальная энергия не растет неограниченно, как это было бы по приближенной формуле (2.3), а стремится к определенному пределу

$$u(\infty)=mgr_0.$$

Таким образом, с учетом ослабления притяжения с расстоянием энергия тела на бесконечном расстоянии такая же, как по приближенной формуле на расстоянии r_0 от поверхности Земли, т. е. на расстоянии $2r_0$ от центра Земли.

В этой задаче мы встречаемся с физическим вопросом, в котором рассматривается бесконечное расстояние. По этому поводу нужно иметь в виду, что в физической задаче нас интересуют всегда конечные величины, конечные расстояния. Так, например, если рассматриваются движение тела и энергия тела, зависящие от притяжения Земли, то непосредственно может интересовать достижение Луны, Марса или других планет или даже других звезд, т. е. достижение расстояний больших или очень больших по сравнению с радиусом Земли, но все же конечных!

Пусть рассматривается вопрос о запуске ракеты на большую высоту, на большое расстояние от Земли. Интересуют необходимая энергия и время полета. Рассмотрим два случая:

1) ракета должна пролететь расстояние $R=10r_0$, где r_0 — радиус Земли,

2) ракета должна пролететь расстояние $R=100r_0$.

Время полета приблизительно пропорционально расстоянию. Поэтому во втором случае ракете придется лететь примерно в 10 раз дольше, чем в первом. Изменение R существенно изменяет время полета. Поэтому при рассмотрении времени полета заменять R бесконечностью никак нельзя.

Работа, необходимая для того, чтобы, оторвавшись от Земли, пройти на расстояние R от центра Земли, равна

$$A=mgr_0^2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{R}\right).$$

Вспоминая, что $r_0 = 6{,}4 \cdot 10^8$ *см*, получаем в первом случае $A_1 = mg \cdot 5{,}76 \cdot 10^8$, а во втором случае $A_2 = mg \cdot 6{,}34 \cdot 10^8$.

Изменение расстояния в 10 раз незначительно повлияло на величину необходимой энергии. Если бы мы заменили R бесконечностью, то получили бы

$$A_\infty = mg \cdot 6{,}4 \cdot 10^8.$$

A_1 отличается от A_∞ на 10%, A_2 — на 1%. Поэтому при подсчете работы R можно заменить бесконечностью.

Таким образом, одна и та же величина R в одной и той же задаче при рассмотрении разных сторон вопроса либо может заменяться на бесконечность, либо не должна заменяться на бесконечность. Возможность такой замены зависит не только от самой величины R (и ее сравнения с другими входящими в формулы величинами той же размерности, в данном случае r_0). Возможность замены зависит от строения самой той формулы, в которой производится замена.

Возвращаясь к вопросу о потенциальной энергии тела, притягиваемого к Земле, найдем численное значение $u(\infty)$ на единицу массы: в физической системе единиц оно равно $gr_0 = 981 \cdot 6{,}4 \cdot 10^8 \approx 6{,}28 \cdot 10^{11}$ *эрг/г*, в технической системе $gr_0 = 6{,}28 \cdot 10^6$ килограммометров на килограмм. Любопытно перевести эту величину в тепловые единицы: 1 килокалория равна 427 *кгм*, так что $u(\infty) = 15 \cdot 10^3$ килокалорий на килограмм. Эта величина в 30 раз больше теплоты испарения воды и в 10 раз больше химической энергии взрывчатых веществ.

В задачах небесной механики и в физике целесообразно выбирать за нуль потенциальную энергию тела, находящегося на бесконечном расстоянии от притягивающей его массы. Тогда для потенциальной энергии тела на расстоянии r получим:

$$u(r) = u(\infty) - \int_\infty^r F(r)\,dr = -\frac{C}{r},$$

где C — константа в выражении силы $\left(F = -\frac{C}{r^2}\right)$; она определяется по формуле (2.4), если известно ускорение силы тяжести на поверхности Земли g и радиус Земли r_0.

Можно получить другое выражение для C. Действительно, по закону тяготения Ньютона $F = -\varkappa \frac{mM}{r^2}$, где m — масса тела, притягиваемого к Земле, M — масса Земли, r — расстояние до центра Земли, $\varkappa$ — гравитационная постоянная, равная $6{,}7 \cdot 10^{-8}$ $дин \cdot см^2/г^2 = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$ $см^3/г \cdot сек^2$. Поэтому $C = \varkappa m M$. Пользуясь этой формулой, легко определить C, зная $\varkappa$ и M.

Задача о потенциальной энергии двух электрических зарядов e_1 и e_2 совершенно аналогична предыдущей. Сила взаимодействия между ними равна

$$F = k \frac{e_1 e_2}{r^2}. \tag{2.6}$$

При этом, если заряды выражены в электростатической системе единиц $\left(\text{единица заряда равна } \frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ кулона}\right)$, а сила — в динах, то в формуле (2.6) $k = 1$. В формуле нет знака минус, который стоит в выражении для силы тяготения. Действительно, если e_1 и e_2 одноименные (оба положительны или оба отрицательны), то произведение $e_1 e_2$ положительно. Но в этом случае заряды отталкиваются, т. е. сила F положительна.

Определяя снова $u(r)$ так, чтобы $u(\infty) = 0$, получим:

$$u(r) = \frac{e_1 e_2}{r}.$$

Потенциальная энергия двух одноименных зарядов на конечном расстоянии положительна: они отталкиваются и, расходясь с расстояния r до ∞, могут совершить работу, равную

$$u(r) - u(\infty) = u(r).$$

Потенциальная энергия двух разноименных зарядов отрицательна. Действительно, $e_1 e_2 < 0$, если $e_1 > 0$, $e_2 < 0$; это ясно и физически: так как разноименные заряды притягиваются, то нужно затратить энергию для того, чтобы растащить их один от другого на бесконечное расстояние.

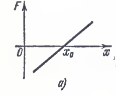
Отметим, что благодаря закону сохранения энергии потенциальную энергию можно определить не только как способность производить работу, но и как работу, которую нужно было затратить для приведения системы в дан-

ное состояние. Растянутая пружина способна произвести определенную работу, возвращаясь в нерастянутое состояние. Очевидно, именно такую же работу надо было затратить для того, чтобы растянуть пружину. Аналогичные утверждения можно высказать в случае тела, поднятого на определенную высоту над Землей, или для системы двух зарядов.

§ 3. Равновесие и устойчивость

Рассмотрим тело, могущее двигаться без трения вдоль какой-то прямой, которую примем за координатную ось x. Пусть на тело действует сила, направленная вдоль этой оси и зависящая от координаты x. Можно снова представить себе, например пружину. Ниже мы разберем и другие примеры.

Положением равновесия называется такое положение, когда сила равна нулю и тело может оставаться в покое. Точку, в которой имеет место равновесие, назовем x_0, так что $F(x_0)=0$. Разлагая функцию $F(x)$ в ряд Тейлора и пренебрегая всеми степенями $(x-x_0)$, кроме первой, видим, что может быть два варианта зависимости $F(x)$ в окрестности точки x_0 (при условии $F(x_0)=0$): $F(x)=k_1(x-x_0)$,



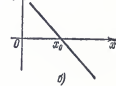


Рис. 134.

$F(x)=-k_2(x-x_0)$. В обеих формулах подразумевается, что k_1 и k_2 — положительные величины. Первый случай показан на рис. 134, *а*, второй — на рис. 134, *б*.

Этим двум случаям соответствует совершенно различный характер равновесия. В самом деле, в случае рис. 134, *а*, если тело находится несколько правее точки x_0, то на него действует положительная сила, т. е. сила, которая тянет его дальше вправо. Таким образом, в случае рис. 134, *а* равновесие в точке $x=x_0$ неустойчивое: достаточно малого

отклонения тела (безразлично вправо или влево), чтобы на тело начала действовать сила, увеличивающая это отклонение. Напротив, в случае рис. 134, *б* при отклонении тела вправо сила отрицательна, т. е. тянет влево. Отклонение тела от положения равновесия вызывает силу, стремящуюся возвратить тело в положение равновесия. В этом случае имеем дело с устойчивым равновесием. Легко убедиться, что для тела, закрепленного на пружине, осуществляется второй случай.

В соответствии с выписанными выше выражениями силы находим выражения потенциальной энергии, пользуясь (2.2). В случае неустойчивого равновесия

$$u(x) = u(x_0) - \frac{1}{2} k_1 (x - x_0)^2.$$

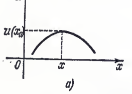
В случае устойчивого равновесия

$$u(x) = u(x_0) + \frac{1}{2} k_2 (x - x_0)^2.$$

Соответствующий ход кривых показан на рис. 135, *а* и *б*.

Таким образом, в случае неустойчивого равновесия потенциальная энергия имеет максимум, в случае устойчивого равновесия — минимум. В обоих случаях в самой точке максимума или минимума $F = -\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0$, сила равна нулю.

Результат является вполне естественным. Если тело находится в состоянии максимума потенциальной энергии,



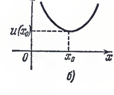


Рис. 135.

то при перемещении в обоих направлениях выделяется энергия, которая может пойти на преодоление инерции, превращаясь в кинетическую энергию. Если же тело находится

в состоянии минимума энергии, то для перемещения его в любое другое положение нужно затратить энергию извне; эта энергия пойдет на увеличение потенциальной энергии; затратив малую энергию, можно будет лишь незначительно сместить тело. Такие свойства тела, находящегося в положении минимума потенциальной энергии, полностью соответствуют понятию устойчивого равновесия.

При действии силы тяжести вблизи поверхности Земли потенциальная энергия равна mgz, где z есть высота над поверхностью Земли. Кривые, изображающие зависимость $u(x)$, можно представить себе как кривые, изображающие высоту положения тела в зависимости от горизонтальной координаты x. Надо представить себе тело, которое движется вдоль кривой линии как бусина, нанизанная на жесткую проволоку. Кривая $u(x)$ соответствует форме проволоки, если плоскость чертежа расположить вертикально. Тогда очевидно, что максимум $u(x)$ представляет собой (рис. 135, *а*) точку проволоки, с которой бусины при малейшем толчке скатываются вниз, минимум $u(x)$ (рис. 135, *б*) — нижнюю точку, в которой бусины находятся в устойчивом положении и куда они сами скатываются с соседних участков.

Рис. 136.

Таким образом, по графику $u(x)$ можно наглядно представить себе направление сил и характер равновесия.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть заряженное тело движется по прямой (примем ее за ось x), на которой закреплены неподвижно два одинаковых заряда симметрично относительно начала координат на расстоянии $2a$ друг от друга (рис. 136).

Ясно, что в начале координат тело находится в положении равновесия. Действительно, в этом случае силы, действующие на тело со стороны неподвижных зарядов, равны по величине и противоположны по направлению, так что они уравновешиваются, т. е. их равнодействующая равна нулю.

Потенциальная энергия тела складывается из двух членов

$$u(x) = \frac{e_1 e}{r'} + \frac{e_1 e}{r''},$$

где e — заряд тела, e_1 — величина неподвижного заряда, r' — расстояние от тела до левого заряда, r'' — расстояние от тела до правого заряда,

$$r' = x + a, \quad r'' = a - x,$$

поэтому

$$u(x) = e_1 e \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right). \tag{3.1}$$

Соответствующие кривые изображены на рис. 137. Верхняя кривая соответствует $e_1 e > 0$, т. е. случаю одноименного заряда тела и неподвижных зарядов, нижняя кривая соответствует случаю $e_1 e < 0$, т. е. случаю, когда тело имеет заряд, знак которого противоположен знаку неподвижных зарядов.

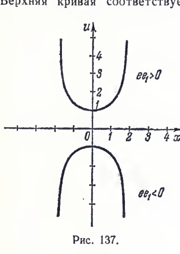


Рис. 137.

В случае $e_1 e < 0$ равновесие в начале координат неустойчивое. Действительно, тело притягивается и к левому и к правому заряду, в начале координат силы протяжения к двум зарядам уравновешивают друг друга. Однако если тело немного сдвинется, например, вправо, то притяжение к правому заряду окажется сильнее и тело будет продолжать двигаться в ту же сторону.

Найдем $\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=0}$. Пользуясь (3.1), получаем:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2e_1 e \left[\frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(a-x)^3} \right]. \tag{3.2}$$

Полагая в формуле (3.2) $x = 0$, находим:

$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{4e_1 e}{a^3}.$$

Следовательно, при $x = 0$ $\frac{d^2u}{dx^2} > 0$, если $e_1 e > 0$. В этом случае $u(x)$ имеет минимум при $x = 0$, равновесие устой-

чиво. Если же $e_1 e < 0$, то $\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=0} < 0$, $u(x)$ имеет максимум при $x = 0$, равновесие неустойчиво.

2. Аналогично рассмотрим случай, когда заряды расположены на том же расстоянии от начала координат, но на прямой, перпендикулярной к линии (осн абсцисс), по которой движется заряженное тело (рис. 138). В этом случае потенциальная энергия равна

$$u(x) = 2\frac{e_1 e}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

(график потенциальной энергии при $a = 1$, $|e_1 e| = 1$ изображен на рис. 139). В примере 2 при $e_1 e > 0$ равновесие в начале координат неустойчиво. При заряде тела другого знака по сравнению с неподвижными зарядами ($e_1 e < 0$) равновесие устойчиво.

Это нетрудно установить, рассматривая силу, действующую на подвижный заряд (рис. 140). Пусть $e_1 e > 0$. Сместим тело вправо от положения равновесия. Тогда равнодействующая снл отталкивання направлена тоже вправо, в сторону дальнейшего увеличення отклонення. Равновесие неустойчивое. В случае $e_1 e < 0$ равнодействующая направлена в сторону уменьшения отклонения. Равновесне устойчивое.

Рис. 138.

К этим результатам также нетрудно прийти, рассматривая $\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=0}$.

Обратим внимание, что при $e_1 e > 0$, когда в примере 1 (рис. 136) была устойчивость, в примере 2 (рис. 138) равновесие неустойчиво. Прн $e_1 e < 0$ (разноименные заряды) положение обратное: равновесие неустойчиво при расположении зарядов в соответствии с рис. 136 и устойчиво при расположении их, как на рис. 138.

Повернув рис. 138 на 90°, мы заметим, что он, в сущности, относится к тому же начальному распределению зарядов в положении равновесия, что и рис. 136. Можно сказать, что рис. 136 и 138 относятся к одинаковому начальному распределению зарядов, но рассматриваются различные

направления движения (рис. 141). При этом всегда (при любых знаках зарядов) в том или ином направлении движения равновесие оказывается неустойчивым.

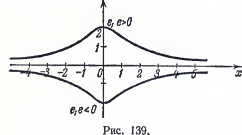


Рис. 139.

В электростатике доказывается, что этот результат является совершенно общим: в пространстве между внешними закрепленными зарядами нигде нет точки равновесия такой,

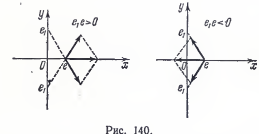


Рис. 140.

чтобы равновесие было устойчивым относительно перемещений в любом направлении.

Приведенное ниже общее доказательство этого факта может показаться читателю довольно сложным. Его можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего материала.

Для доказательства в общем виде заметим, что потенциальная энергия заряда e, находящегося в точке (x, y, z), в зависимости от его расстояния r от неподвижного заряда e_1, помещенного в точку (x_1, y_1, z_1), дается формулой

$$u = \frac{e_1e}{r} = \frac{e_1e}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}.$$

Рассмотрим движение по оси x и найдем $\frac{d^2u}{dx^2}$ при постоянных y и z; такая величина обозначается $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Затем аналогично найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, относящиеся соответственно к движению по осям y и z. Оказывается *), что при любых x, y, z, x_1, y_1, z_1 сумма вторых производных по трем перпендикулярным осям равна нулю!

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Рис. 141.

Очевидно, это свойство сохранится и для суммы любого числа членов вида $\frac{e_k e}{r_k}$, где e_k — неподвижный заряд в точке (x_k, y_k, z_k), а r_k есть расстояние заряда e от этой точки. Следовательно, при любом распределении неподвижных зарядов в пространстве между ними имеет место формула

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{3.3}$$

в частности, и в той точке, где имеет место равновесие заряда e. Для равновесия необходимо, чтобы силы по любой оси равнялись нулю. Для этого нужно, чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Если равны нулю силы по трем перпендикулярным осям, то равна нулю и сила в любом направлении **).

Для того чтобы равновесие было устойчивым относительно движения по всем трем перпендикулярным

*) Читателю следует самому в этом убедиться.

**) Если имеется отличная от нуля сила F, действующая в каком-либо направлении, то вдоль каждой оси будет действовать сила, равная проекции силы F на эту ось.

направлениям, нужно, чтобы было

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} > 0.$$

Однако это противоречит уравнению (3.3), так как сумма трех положительных величин не может равняться нулю.

В последнее время (с 1956 г.) вопрос о том, можно ли устойчиво удерживать заряженные частицы, действуя на них неподвижными зарядами, привлек большое внимание. Для получения ядерной энергии при сжигании дейтерия нужно удерживать заряженные ядра в пространстве, не допуская столкновения их со стенками сосуда. По доказанному выше этого нельзя достичь, располагая на стенках сосуда заряды, как бы ни были подобраны эти заряды. Таким образом, это направление изобретательства можно сразу назвать безнадежным.

Известно, что положительное решение задачи в принципе может дать предложенный советскими академиками А. Д. Сахаровым и И. Е. Таммом способ применения магнитного поля.

Упражнения

1. Заряд e движется по прямой, на которой закреплены неподвижно два положительных заряда e_1 и $e_2 = 4e_1$ на расстоянии $2a$ один от другого. Найти ту точку на прямой, в которой возможно равновесие заряда, и установить характер равновесия. Рассмотреть два случая: $e > 0$ и $e < 0$.
2. Решить задачу 1, изменив знак заряда e_2.

§ 4. Второй закон Ньютона

Сформулированный Ньютоном второй закон движения заключается в том, что произведение массы на ускорение равно действующей силе*). Ускорение a есть производная скорости v по времени; в свою очередь скорость есть про-

*) Первый закон Ньютона — закон инерции — заключается в том, что тело, на которое не действуют никакие силы, движется прямолинейно и равномерно. Это значит, что у такого тела ускорение равно нулю при равной нулю силе. Следовательно, первый закон Ньютона содержится во втором законе, является его частным случаем.

изводная от координаты тела по времени. Таким образом,

$$ma = m\frac{dv}{dt} = F, \tag{4.1}$$

или

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F. \tag{4.2}$$

Начнем со случая, когда сила задана как функция времени $F = F(t)$. Это означает, что производная $\frac{dv}{dt}$ задана как функция времени. В таком случае легко найти из закона Ньютона (4.1) скорость в любой заданный момент; кроме действующей силы, при этом надо задать также скорость в какой-то момент t_0. Тогда

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt. \tag{4.3}$$

Зная скорость в зависимости от времени $v(t)$ и начальное положение тела $x(t_0)$, найдем положение тела в любой момент

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt, \tag{4.4}$$

где $v(t)$ дано предыдущей формулой.

Соотношение между скоростью и путем подробно с примерами рассматривалось в главе I.

В целом формулы (4.3) и (4.4) решают задачу нахождения $x(t)$ из уравнения (4.2). Соотношение (4.2) — это дифференциальное уравнение второго порядка, в него входит вторая производная неизвестной функции $x(t)$. В ответ входит не только заданная функция $F(t)$, но и две постоянные величины, определяемые из начальных условий: положение тела и скорость тела в заданный момент времени t_0.

Если задан или экспериментально найден закон движения тела, т. е. задана функция $x(t)$, то нахождение силы, действующей на тело, не представляет никакого труда: надо найти вторую производную функции $x(t)$ и умножить ее на m [формула (4.2)].

Упражнения

1. Найти закон движения тела под действием постоянной силы F, если в момент времени $t=0$ тело покоилось в начале координат ($x=0$).

2. То же при условии, что при $t=0$ $x=0$, $v=v_0$.

3. То же при условии, что при $t=0$ $x=x_0$, $v=v_0$.

4. Тело массой в 20 *кг* начинает двигаться под действием силы 1 *кГ* из начала координат без начальной скорости. Какой путь пройдет оно за 10 *сек*?

5. Шарик свободно, т. е. с начальной скоростью, равной нулю, падает с высоты 100 *м*. Через сколько времени он достигнет земли? (Сопротивлением воздуха пренебречь.)

6. В условиях предыдущей задачи шарик начинает паденне со скоростью $v_0=10$ *м/сек*. Разобрать два случая: а) начальная скорость шарика v_0 направлена вниз, б) начальная скорость шарика v_0 направлена вверх. Определить, через сколько времени шарик достигнет земли. Какова его скорость в момент приземления. Проверить, что в случаях а) и б) скорость приземления одинакова.

7. На тело действует сила, пропорциональная времени, протекшему с начала движения (коэффициент пропорциональности равен k). Найти закон движения тела, если известно, что тело начинает движение из точки $x=0$ с начальной скоростью v_0.

8. На тело действует сила, периодически меняющаяся со временем $F=f\cos\omega t$ (f, ω — постоянные числа).

а) Найти закон движения тела при условии, что при $t=0$ $x=0$, $v=0$. Установить, что такое движение является колебательным. Определить период колебания, наибольшее значение $x(t)$, наибольшее значение скорости.

б) То же для силы $F=f\sin\omega t$, при $t=0$ $x=0$, $v=0$.

9. Тело движется под действием постоянной силы F. В момент времени $t=t_0$ тело было в точке $x=x_0$. Найти, какую скорость должно иметь тело при $t=t_0$, чтобы в момент времени $t=t_1$ попасть в точку $x=x_1$.

§ 5. Импульс силы

Задача нахождения закона движения тела при заданной зависимости силы от времени в принципе решена в предыдущем параграфе. Здесь мы рассмотрим свойства этого решения и некоторые новые понятия, связанные с решением.

Произведение $P=mv$ массы на скорость называется «количеством движения». Величина

$$\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt \tag{5.1}$$

называется «импульсом силы» за время от t_0 до t.

Формула (4.3) может быть записана так:

$$P(t) - P(t_0) = \int_{t_0}^{t} F\,dt. \tag{5.2}$$

Словесная формулировка результата (5.2): изменение количества движения равно импульсу силы.

Часто встречается случай силы, действующей только в течение краткого промежутка времени: примером является удар молотком, отскакивающим после удара от тела. И до и после удара сила равна нулю. При отсутствии других сил, кроме краткой силы удара, очевидно, что до удара тело движется с постоянной скоростью, и после удара тело движется с другой, тоже постоянной скоростью.

Рис. 142.

Пусть $F(t)$ отлично от нуля только в промежутке от t_1 до t_2 (рис. 142). Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt. \tag{5.3}$$

Эту величину можно назвать *полным* импульсом силы — полным в том смысле, что интеграл берется по всему промежутку времени, когда сила фактически действует.

В выражение (5.1) входит интеграл от t_0 до t. Если $t_0 < t_1$, а $t > t_2$, то

$$\int_{t_0}^{t} F\,dt = I.$$

Действительно, запишем:

$$\int_{t_0}^{t} F\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F\,dt + \int_{t_2}^{t} F\,dt.$$

В правой части первый и третий интегралы равны нулю, так как в соответствующих промежутках $F = 0$, а второй (средний) интеграл есть I. Таким образом, из формул (5.2) и (5.3) получаем $P(t) = P(t_0) + I$, если $t_0 < t_1$, $t > t_2$.

Из формулы (4.3) видим, что скорость после удара зависит только от *импульса* силы, т. е. от интеграла силы, но не от детального вида функции $F(t)$. Например, несколько различных кривых $F(t)$, нарисованных на рис. 143, дают

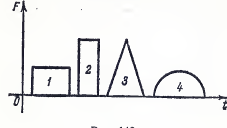


Рис. 143.

одинаковый импульс силы, т. е. одинаково меняют скорость тела. Для каждой из кривых $F(t)$ нетрудно нарисовать соответствующий график скорости $v(t)$. На рис. 144 показаны

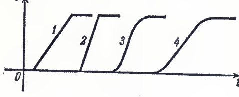


Рис. 144.

такие графики в общем предположении, что начальная скорость равна нулю. Общим для всех кривых рис. 144 является конечное значение скорости, все кривые переходят справа в горизонтальную прямую на высоте $v = \frac{I}{m}$.

Каждую из кривых $F(t)$ рис. 143 можно сжимать по оси времени и пропорционально растягивать по оси силы. Площадь под кривой F, т. е. $\int F\,dt$, полный импульс силы, при этом не изменяется. Именно так получена, например, кривая *2* на рис. 143 из кривой *1*.

Чем короче время действия силы, тем меньше время, в течение которого скорость тела меняется от начального значения $v_0 = 0$ до конечного значения $v_k = \frac{I}{m}$ (рис. 144). Таким образом, в пределе, при очень большой силе, действующей в течение очень малого времени, график скорости

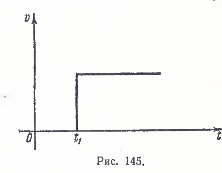


Рис. 145.

приобретает вид ступеньки (рис. 145). При этом становится несущественным, какую из кривых рис. 143 мы сжимали: ступенька характеризуется только одной величиной $v_k = \frac{I}{m}$, а эта величина для всех кривых одинакова.

Если до действия силы тело покоилось в точке x_0, то после кратковременного действия большой силы тело начинает двигаться с постоянной скоростью, равной $\frac{I}{m}$. Если сила действовала в момент t_1 (промежуток времени от t_1 до t_2 считаем малым и не различаем t_2 и t_1), то положение тела в зависимости от времени дается формулами

$$\begin{aligned} x &= x_0, & t &< t_1, \\ x &= x_0 + \frac{I}{m}(t - t_1), & t &> t_1. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Соответствующий график показан на рис. 146. Отметим, что $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t).$$

Напомним, что на графике $(x;\ t)$ первая производная $\frac{dx}{dt}$ связана с наклоном касательной к кривой. Вторая производная

характеризует скорость изменения первой производной, т. е. вторая производная связана с кривизной линии $x(t)$.

На рис. 146 линия $x(t)$ имеет излом в точке $t=t_1$, $x=x_0$. Излом можно представить себе как точку, в которой кривизна бесконечна, так что наличие излома соответствует рассмотрению очень большой (в пределе — бесконечной) силы. Однако до и после излома производная $\frac{dx}{dt}$ конечна; значит, очень большая сила действовала очень малое время, так что импульс силы конечен. Импульс легко определить по графику (рис. 146), вычисляя скорость после действия силы и используя формулу (5.2).

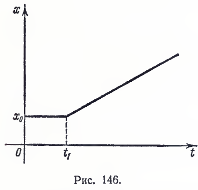


Рис. 146.

Найденный нами закон движения тела, которое покоилось до момента $t=\tau$, а в этот момент получило импульс силы I, поможет нам усовершенствовать формулы (4.3) и (4.4) предыдущего параграфа. Для этого нам понадобится специальный случай формулы (5.4), когда при $t=\tau$ тело находилось в начале координат ($x_0=0$). Введем специальное обозначение:

$$x_1(t,\ \tau)=\begin{cases} 0, & t<\tau, \\ \frac{I}{m}(t-\tau), & t>\tau. \end{cases} \tag{5.5}$$

Если подставить $v(t)$ из (4.3) в формулу (4.4) и использовать более аккуратные обозначения (так, чтобы верхнему пределу и переменной интегрирования отвечали разные буквы), то получится выражение, на первый взгляд довольно громоздкое:

$$x(t)=x(t_0)+(t-t_0)\cdot v(t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} F(t_2)\,dt_2. \tag{5.6}$$

Стоящий здесь интеграл можно преобразовать по формальным правилам обращения с повторными интегралами. Однако

мы нигде не упоминали об этих правилах, и поэтому интересующее нас преобразованное выражение в виде однократного интеграла мы получим, пользуясь законом (5.5) движения тела под действием одиночного импульса силы.

Действие силы $F(t)$ за интервал времени $\Delta\tau$ от некоторого момента τ до $\tau+\Delta\tau$ можно приближенно заменить действием импульса силы $\Delta I = F(\tau)\cdot\Delta\tau$. Движение тела под действием такого импульса нам уже известно — см. формулу (5.5), в которой нужно заменить I на $\Delta I(\tau)$.

Дальше остается лишь сложить вклады всех интервалов Δt_i в координату $x(t)$, и в результате получим:

$$x(t) = \sum x_1(t, \tau)\,\Delta I(\tau) = \sum \frac{1}{m}(t-\tau)\cdot F(\tau)\cdot\Delta\tau = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(\tau)\cdot(t-\tau)\,d\tau. \qquad (5.7)$$

Здесь, как обычно, мы заменили сумму на интеграл для достаточно мелких интервалов $\Delta\tau$. Формула (5.7) не учитывает начальной координаты $x(t_0)$ и движения под действием начальной скорости: $(t-t_0)\cdot v(t_0)$; эти члены мы просто прибавим к выражению (5.7), и окончательно:

$$x(t) = x(t_0) + (t-t_0)\,v(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t_1)\,(t-t_1)\,dt. \qquad (5.8)$$

Формула (5.8) выгодно отличается от (5.6) тем, что в (5.8) интегрировать нужно только один раз. Мы не сказали, почему можно просто складывать слагаемые от отдельных импульсов, от начальной скорости и начальной координаты. Подробнее об этом говорится в § 5 Добавления. Здесь же нам достаточно того, что можно непосредственно проверить, чему равно $x(t_0)$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ по формуле (5.8). Для этого нужно дифференцировать $x(t)$ из (5.8), аналогично тому, как это делалось при проверке формулы (5.5) из § 5 главы V.

Напомним читателю, что по третьему закону Ньютона при взаимодействии двух тел сила, с которой второе тело

действует на первое (F_1)*), равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой первое тело действует на второе (F_2),

$$F_2(t) = -F_1(t).$$

Формула (5.2) в применении к первому телу и силе F_1 дает:

$$P_1(t) - P_1(t_0) = \int_{t_0}^{t} F_1\,dt. \qquad (5.9)$$

Эта же формула в применении ко второму телу и силе F_2 дает:

$$P_2(t) - P_2(t_0) = \int_{t_0}^{t} F_2\,dt. \qquad (5.10)$$

Так как $F_2 = -F_1$ по третьему закону Ньютона, то

$$\int_{t_0}^{t} F_2\,dt = -\int_{t_0}^{t} F_1\,dt.$$

Поэтому (5.10) принимает вид

$$P_2(t) - P_2(t_0) = -\int_{t_0}^{t} F_1\,dt. \qquad (5.11)$$

Сопоставляя (5.9) и (5.11), находим:

$$P_1(t) - P_1(t_0) = P_2(t_0) - P_2(t).$$

Отсюда

$$P_1(t) + P_2(t) = P_1(t_0) + P_2(t_0).$$

Последняя формула показывает, что действие тел друг на друга не меняет суммы количеств движения этих тел.

§ 6. Кинетическая энергия

Рассмотрим тело, движущееся под действием известной силы $F(t)$, и найдем связь между работой, произведенной этой силой, и скоростью движения тела.

*) Значок у буквы F ставим так, чтобы он показывал, *на какое* тело действует сила F, значок у буквы P также означает номер тела, к которому относится количество движения.

Из основного уравнения $m\frac{dv}{dt} = F(t)$, умножая обе части на скорость v, получим:

$$mv\frac{dv}{dt} = F(t)\,v. \tag{6.1}$$

Имеет место тождество

$$v\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

справедливое, какова бы ни была зависимость $v(t)$. Пользуясь им, перепишем (6.1) в виде

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = F(t)\,v,$$

а так как m — постоянная величина, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F(t)\,v.$$

Вводя обозначение

$$\frac{mv^2}{2} = K, \tag{6.2}$$

получим окончательно:

$$\frac{dK}{dt} = F(t)\,v. \tag{6.3}$$

Пользуясь выражением для работы (1.1), получим:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,v\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dK}{dt}\,dt,$$

откуда

$$A = K(t_1) - K(t_0). \tag{6.4}$$

Величина K есть кинетическая энергия тела. Формула (6.4) выражает закон сохранения энергии: изменение кинетической энергии тела равно работе, произведенной силой. Формула (6.3) выражает закон: скорость изменения кинетической энергии равна мощности, которую развивает сила.

Когда сила задана определенной функцией времени, то импульс силы и, следовательно, вызванное данной силой изменение количества движения тела не зависят ни от массы

тела, ни от его начальной скорости, так как импульс силы и изменение количества движения есть $\int\limits_{t_0}^{t_1} F\,dt$.

Напротив, работа силы и изменение кинетической энергии тела под действием силы, как видно из формул (6.2), (6.3), (6.4), существенно зависят не только от самой силы, но и от массы тела и его начальной скорости. Действительно, действуя заданной силой в течение определенного времени на тяжелое тело, покоившееся в начале движения, мы придадим ему лишь малую скорость, перемещение тела будет мало и работа силы также будет мала. Легкое тело заберет на себя большую работу, приобретет большую энергию. Если до начала действия силы тело двигалось в сторону, противоположную направлению действия силы, то сила может уменьшить его энергию.

Представим себе тело, участвующее одновременно в двух движениях. Например, человек ходит по каюте парохода, а пароход движется, или в каюте падает брошенный мяч. Предположим, что одно из этих движений (в нашем примере это — движение парохода) равномерное. Возникает вопрос: можно ли, наблюдая падение мяча в каюте либо движение в ней какого-нибудь тела под действием приложенной силы, установить, движется пароход или нет? Иначе говоря, влияет ли равномерное движение парохода на характер движения предметов на самом пароходе? Оказывается, что нет, никак не влияет. Опыты показали, что отсутствие влияния равномерного движения на физические явления относится не только к механике, но и к процессу распространения света, к электрическим и магнитным явлениям. Из этого факта Эйнштейн сумел сделать выводы огромной важности, развивая теорию относительности *).

В механике отмеченную независимость от равномерного движения установить нетрудно. Действительно, пусть тело движется в поезде со скоростью v, а сам поезд движется по рельсам с постоянной скоростью v_0. Тогда по отношению к наблюдателю, стоящему на рельсах, тело движется со скоростью $v_1 = v + v_0$. При этом ускорение тела одинаково и для наблюдателя, стоящего на рельсах, и для

*) В нашей книге теория относительности не излагается.

наблюдателя, едущего в поезде,

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt}(v + v_0) = \frac{dv}{dt} + \frac{dv_0}{dt} = \frac{dv}{dt} = a.$$

Таким образом, постоянное слагаемое в выражении для скорости не меняет ускорения. Поэтому и сила, действующая на тело, не меняется: $F = ma_1 = ma$. Разность скоростей тела до и после действия силы тоже одинакова для наблюдателя, находящегося на рельсах, и для наблюдателя, стоящего в поезде. Действительно, пусть скорость по отношению к наблюдателю, стоящему в поезде, до действия силы есть v', после действия силы v''; для наблюдателя, стоящего на путях, соответствующие скорости будут v_1' и v_1''. Тогда $v_1' = v' + v_0$, $v_1'' = v'' + v_0$. Поэтому

$$v_1'' - v_1' = v'' + v_0 - v' - v_0 = v'' - v'.$$

Сложнее обстоит дело с кинетической энергией*): не только сама кинетическая энергия, но даже и разности кинетических энергий различны для различных наблюдателей. Для наблюдателя, стоящего на путях,

$$K_1'' - K_1' = \frac{m(v_1'')^2}{2} - \frac{m(v_1')^2}{2} = \frac{m(v'' + v_0)^2}{2} - \frac{m(v' + v_0)^2}{2} =$$
$$= \frac{m(v'')^2}{2} - \frac{m(v')^2}{2} + mv_0v'' - mv_0v' =$$
$$= K'' - K' + mv_0(v'' - v').$$

В этой формуле K_1'' и K_1' — конечная и начальная кинетическая энергия, вычисленная наблюдателем на путях, а K'' и K' — соответствующая кинетическая энергия, вычисленная наблюдателем в поезде.

Работа силы и мощность для различных наблюдателей также различны, так как хотя сила одна и та же, но пройденный путь и скорость различны для наблюдателя, стоящего на путях, и для наблюдателя, едущего в поезде.

Однако закон равенства изменения кинетической энергии и работы силы выполняется для любого наблюдателя, хотя каждая из этих величин в отдельности неодинакова для разных наблюдателей. (Примеры, подтверждающие это обстоятельство, имеются в упражнениях.)

*) Нижеследующее в первом чтении можно пропустить.

Отметим замечательную формулу, которая имеет место, если тело движется под действием одной только данной силы $F(t)$,

$$A = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\, v(t)\, dt = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(v_1+v_0)(v_1-v_0) =$$

$$= \frac{v_1+v_0}{2}(mv_1 - mv_0) = \frac{v_1+v_0}{2}\int_{t_0}^{t_1} F(t)\, dt.$$

Таким образом, в этом случае скорость $v(t)$ можно вынести из-под интеграла, заменяя ее средним арифметическим начальной и конечной скоростей движения.

Этот вывод справедлив только в том случае, если $v(t)$ есть скорость, полученная телом в результате действия лишь одной силы $F(t)$. Если же на тело действует несколько сил: F_1, F_2, F_3, то работа, произведенная всеми силами, равна произведению средней скорости на сумму импульсов всех сил:

$$A = \frac{v_1+v_0}{2}\int_{t_0}^{t_1}(F_1+F_2+F_3)\, dt =$$

$$= \frac{v_1+v_0}{2}\int_{t_0}^{t_1} F_1\, dt + \frac{v_1+v_0}{2}\int_{t_0}^{t_1} F_2\, dt + \frac{v_1+v_0}{2}\int_{t_0}^{t_1} F_3\, dt. \qquad (6.5)$$

Однако работа каждой из сил (например, F_2) в отдельности не равна соответствующему слагаемому $\frac{v_0+v_1}{2}\int_{t_0}^{t_1} F_2\, dt$ в формуле (6.5), так как сила F_2, действуя отдельно, сообщила бы телу скорость, отличную от $v(t)$ *).

Упражнения

1. Найти формулу для кинетической энергии тела, движущегося под действием постоянной силы F (в начальный момент времени скорость была равна нулю) в зависимости от времени, а также в зависимости от пройденного пути.

---

*) См. ниже задачу № 6.

2. Тело движется под действием силы $F = f\cos\omega t$; при $t = 0$ $v = 0$. Найти выражение для кинетической энергии тела. Определить максимум кинетической энергии.

3. Тело движется по закону $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, ($A$, ω, α — постоянные числа). Определить среднюю кинетическую энергию при условии, что t неограниченно растет от значения $t = 0$.

4. Шарик падает с высоты H из состояния покоя. Показать, что кинетическая энергия шарика $K = mg(H - h)$, где h — высота шарика над землей в данный момент времени.

5. Поезд весом 500 *т* вышел со станции и, пройдя за 3 *мин* 1,5 *км*, развил скорость 45 *км/час*. Определить: а) работу и среднюю мощность паровоза, предполагая, что трения о рельсы нет; б) эти же величины, но с учетом трения. Коэффициент трения $k = 0{,}004$. (Сила трения равна силе притяжения поезда к Земле, т. е. его весу, умноженной на k).

6. На тело действуют две силы: $F_1 = at$ и $F_2 = a(\theta - t)$. Импульсы этих сил за время от 0 до θ одинаковы. В момент времени $t = 0$ тело имело скорость $v_0 = 0$. Найти работу каждой силы за время от 0 до θ и сравнить ее с произведением импульса на среднюю скорость.

7. Человек, стоя неподвижно на земле, действует на данную массу m силой F в течение времени t. В результате этого масса, находившаяся раньше в покое, приобрела скорость $v_1 = \frac{Ft}{m}$ и кинетическую энергию $\frac{mv_1^2}{2}$, равную работе, произведенной человеком.

Рассмотреть такой же опыт, проделанный в поезде, движущемся со скоростью v_0. Масса m имела до опыта скорость v_0, а после опыта $v_0 + v_1$. Найти изменение кинетической энергии массы m. Какую работу произвел человек? Считая, что человек твердо опирается о стенки вагона и скорость его v_0 не меняется, найти работу силы, произведенной поездом (паровозом) во время опыта.

8. Человек массы M, стоя на коньках на льду (трением о лед пренебрегаем), действует силой F на массу m в течение времени t.

Какую кинетическую энергую приобретет масса m? Какую кинетическую энергию приобретет человек? Чему равна полная работа, произведенная силой над массой m и над человеком? Почему она больше, чем в задаче № 7?

9. Тот же опыт, что и в предыдущей задаче, производит человек, который в начальный момент катился со скоростью v_0 вместе с массой m. Скорость массы m после действия силы равна $v_0 + \frac{Ft}{m}$, скорость человека $v_0 - \frac{Ft}{M}$. Найти изменение кинетической энергии массы m и человека в результате действия силы. Найти работу силы, равную изменению суммарной кинетической энергии, и сравнить ее с результатом предыдущей задачи.

§ 7. Движение под действием силы, зависящей только от скорости

Всякое тело испытывает при движении противодействие со стороны той среды, в которой происходит движение. Если сопротивление невелико, то зачастую его можно не принимать во внимание. Однако в ряде случаев такой подход неудовлетворителен, с сопротивлением среды приходится считаться. Установлено, что если тело движется в жидкости или газе, скорость движения невелика и тело имеет малые размеры, то сила сопротивления пропорциональна скорости движения

$$F(t) = -kv(t). \tag{7.1}$$

Здесь коэффициент пропорциональности $k > 0$, а знак минус в (7.1) показывает, что сила сопротивления направлена противоположно скорости движения тела. Число k зависит от свойств среды, оно пропорционально вязкости среды. Кроме того, k зависит от формы и размеров тела. Например, для случая шара радиуса R формула (7.1) принимает вид

$$F = -6\pi R\eta v(t)\,^{*}), \tag{7.2}$$

где η — вязкость среды. Для воздуха $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-4}$, для воды $\eta = 0{,}01$ (при 20° C), $[\eta] = \frac{г}{см\cdot сек}$ **).

---

*) Формула (7.2) справедлива при $\frac{vR\rho}{\eta} < 5$, где ρ — плотность среды. Читатель легко убедится, что величина $\frac{vR\rho}{\eta}$ безразмерна. Эта величина называется числом Рейнольдса.

**) Вязкость η может быть определена следующим образом. Пусть жидкость (или газ) движется в направлении оси x, но величина скорости различных частиц различна, зависит от координаты y. Ясно, что твердое тело не могло бы так двигаться — оно разрушилось бы. В жидкости или газе при этом между соседними слоями возникает сила трения, которая будет пропорциональна разности скоростей соседних слоев, т. е. производной $\frac{dv}{dy}$. Коэффициент пропорциональности в выражении для силы, приходящейся на 1 $см^2$ горизонтальной поверхности, и называется вязкостью

$$f\,\frac{дин}{см^2} = \eta\frac{dv}{dy}.$$

Рассмотрим задачу о торможении тела. Пусть некоторая сила сообщила телу скорость, а затем в момент времени $t=t_0$ перестала действовать. Тело продолжает двигаться и на него действует только сила сопротивления.

Из второго закона Ньютона

$$m\frac{dv}{dt}=-kv.$$

Разделив обе части на m и обозначив $\frac{k}{m}=\alpha$ $(\alpha>0)$, получим:

$$\frac{dv}{dt}=-\alpha v.$$

Решение этого уравнения есть (см. главу III)

$$v(t)=v_0e^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{7.3}$$

Здесь v_0 есть значение скорости в момент $t=t_0$. Так как $\alpha>0$, то при $t>t_0$ показатель степени в (7.3) отрицательный, $e^{-\alpha(t-t_0)}<1$ и, следовательно, $v(t)<v_0$, т. е. скорость убывает с течением времени. Среда тормозит движение тела.

Найдем выражение для пути, пройденного телом. Из (7.3) получаем:

$$\frac{dx}{dt}=v_0e^{-\alpha(t-t_0)}$$

или

$$dx=v_0e^{-\alpha(t-t_0)}\,dt. \tag{7.4}$$

Пусть в начальный момент времени (при $t=t_0$) тело находилось в начале координат: $x(t_0)=0$. Интегрируя (7.4), получим

$$x(t)=v_0\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-t_0)}\,dt,$$

откуда

$$x(t)=\frac{v_0}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(t-t_0)}\right]. \tag{7.5}$$

Пользуясь формулой (7.5), можно получить весь путь, который пройдет тело после момента t_0, т. е. после того, как сила перестала действовать на тело. Для этого заметим, что при очень больших t величина $e^{-\alpha(t-t_0)}$ весьма мала и

ею можно пренебречь по сравнению с единицей. Поэтому весь путь, который пройдет тело, есть $\frac{v_0}{\alpha}$.

Рассмотрим падение тела в воздухе. Направим ось x вниз к земле, начало координат поместим на высоте H от земли (на земле $x=H$). Пусть движение начинается при $t=0$ со скоростью v_0. Тогда $x(0)=0$, $v(0)=v_0$. Тело находится под действием двух сил: силы тяжести (она способствует движению) и силы сопротивления воздуха (она препятствует движению).

Второй закон Ньютона дает:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \tag{7.6}$$

Разделив все члены (7.6) на m, получим $\left(\text{так как } \frac{k}{m}=\alpha\right)$

$$\frac{dv}{dt}=g-\alpha v. \tag{7.7}$$

Справа в (7.7) вынесем α за скобку

$$\frac{dv}{dt}=\alpha\left(\frac{g}{\alpha}-v\right). \tag{7.8}$$

Установим размерность величины $\frac{g}{\alpha}$. Так как $\alpha=\frac{k}{m}$, а $k=-\frac{F}{v}$, то α имеет разность $1/сек$. Размерность $\frac{g}{\alpha}$ есть $см\cdot сек/сек^2=см/сек$, т. е. $\frac{g}{\alpha}$ имеет размерность скорости*).

Обозначим $\frac{g}{\alpha}=v_1$. Уравнение (7.8) принимает вид

$$\frac{dv}{dt}=\alpha(v_1-v). \tag{7.9}$$

Допустим, что $v_0<v_1$. Тогда правая часть (7.9) в начале движения положительна, значит, и левая часть положительна,

---

*) Сделанный здесь подсчет размерности $\frac{g}{\alpha}$ есть проверка. Размерность $\frac{g}{\alpha}$ видна из формулы (7.8). Так как вычитать можно только величины одной размерности, то $\frac{g}{\alpha}$ должна иметь размерность скорости.

$\frac{dv}{dt} > 0$, поэтому скорость $v(t)$ растет. При этом чем ближе значение v к v_1, тем ближе $\frac{dv}{dt}$ к нулю, тем, следовательно, медленнее растет v. Если бы в некоторый момент времени t_1 оказалось $v(t_1) = v_1$, то тогда v осталось бы постоянным, так как $v \equiv v_1$ является решением уравнения (7.9) с начальным условием $v(t_1) = v_1$. Аналогично если в начале движения $v > v_1$, то v приближается к v_1, но в этом случае v убывает. Поэтому через некоторое время после начала движения тело падает практически с постоянной скоростью $v_1 = \frac{g}{\alpha}$ независимо от того, какую скорость оно имело в начале падения. График скорости для случая $v_0 = 0$ имеет вид, показанный на рис. 147.

Рис. 147.

Проведенные рассуждения показывают, что ряд свойств $v(t)$ можно обнаружить, даже не решая уравнения (7.9). Теперь решим это уравнение. Положим $v_1 - v = z$. Тогда $\frac{dz}{dt} = -\frac{dv}{dt}$, и уравнение (7.9) перепишется так:

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha z,$$

причём при $t = 0$ должно быть $z = v_1 - v_0$. Искомое решение есть $z(t) = (v_1 - v_0)\, e^{-\alpha t}$. Переходя к функции $v(t)$, получаем:

$$v_1 - v(t) = (v_1 - v_0)\, e^{-\alpha t},$$

откуда

$$v(t) = v_1 + (v_0 - v_1)\, e^{-\alpha t}. \tag{7.10}$$

Рассматривая формулу (7.10), нетрудно сделать те же выводы, которые мы уже сделали на пальцах, глядя на уравнение (7.9). Во-первых, если $v_0 > v_1$, то $v(t) > v_1$, так как $(v_0 - v_1)\, e^{-\alpha t} > 0$. Если же $v_0 < v_1$, то $(v_0 - v_1)\, e^{-\alpha t} < 0$ и поэтому $v(t) < v_1$. Во-вторых, каково бы ни было v_0, все

равно при достаточно больших t величина $e^{-\alpha t}$ мала и практически $v(t)=v_1$.

Найдем, пользуясь (7.10), выражение пути в зависимости от времени

$$\frac{dx}{dt}=v_1+(v_0-v_1)e^{-\alpha t},$$

откуда, припоминая, что $x(0)=0$,

$$x(t)=v_1 t+\frac{v_0-v_1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}).$$

Если скорость тела велика или тело больших размеров, то сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Из опытов установлено, что в этом случае *)

$$F=-kS\rho\frac{v^2}{2},$$

где S — площадь сечения тела, ρ — плотность среды. От вязкости среды при этом сила сопротивления практически не зависит. Коэффициент k в этой формуле есть безразмерное число; его величина зависит от формы тела (для хорошо обтекаемых тел величина k может опуститься до 0,03—0,05, для плохо обтекаемых тел величина k достигает 1,0—1,5). Обозначая $\frac{kS\rho}{2}=\varkappa$, получим:

$$F(t)=-\varkappa v^2(t). \tag{7.11}$$

Ясно, что $\varkappa$ имеет размерность *г/см*.

Решим задачу о торможении для силы сопротивления (7.11). Соответствующее уравнение имеет вид

$$m\frac{dv}{dt}=-\varkappa v^2.$$

Разделив обе части на m и положив $\frac{\varkappa}{m}=\beta$ $(\beta>0)$, получим:

$$\frac{dv}{dt}=-\beta v^2.$$

*) Эта формула справедлива при числе Рейнольдса $\frac{Rv\rho}{\eta}>100$. Смысл формулы, приведенной в тексте, заключается в том, что при движении большого тела энергия, затрачиваемая в связи с сопротивлением среды, расходуется не на трение одних слоев жидкости относительно других, а на кинетическую энергию жидкости, вынужденной двигаться, для того чтобы расступиться и пропустить тело. Получите отсюда сами формулу для силы.

Отсюда $\frac{dv}{v^2}=-\beta dt$. Проинтегрировав, получим $-\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v}=$ $=-\beta t\Big|_{t_0}^{t}$, где v_0 — скорость тела в момент времени $t=t_0$.

Поэтому $-\frac{1}{v}+\frac{1}{v_0}=-\beta(t-t_0)$, откуда

$$v=\frac{v_0}{1+\beta v_0(t-t_0)}. \qquad (7.12)$$

Из формулы $\beta=\frac{\varkappa}{m}$ получаем, что β имеет размерность $1/см$.

Найдем формулу для пути. Пользуясь (7.12), получаем:

$$dx=\frac{v_0}{1+\beta v_0(t-t_0)}\,dt,$$

откуда

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{v_0}{1+\beta v_0(t-t_0)}\,dt. \qquad (7.13)$$

Считая, что тело начинает движение из начала координат ($x(t_0)=0$), получаем из (7.13)

$$x(t)=\frac{1}{\beta}\ln\left[1+\beta v_0(t-t_0)\right]. \qquad (7.14)$$

Легко убедиться, что формуле (7.14) соответствует экспоненциальная зависимость скорости от пройденного пути: $v=v_0e^{-\beta x}$. Если теперь мы захотим найти весь путь, который пройдет тело после того, как сила, сообщившая ему скорость, перестала действовать, то обнаружим, что этот путь [формула (7.14)] тем больше, чем больше время t *). На самом деле это не так. Дело в том, что, когда скорость тела станет малой, соотношение (7.11) перестанет быть верным. Надо переходить к формуле (7.1) и соответственно для подсчета пути к (7.5).

Рассмотрим задачу о падении тела в воздухе в случае, когда сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Пусть тело начало падать из начала координат, имея начальную скорость v_0. Совершенно аналогично случаю,

*) По формуле (7.14) $x\longrightarrow\infty$ при $t\longrightarrow\infty$.

когда сопротивление пропорционально скорости, получаем уравнение

$$\frac{dv}{dt}=g-\beta v^2. \qquad (7.15)$$

Уравнение (7.15) перепишем в виде

$$\frac{dv}{dt}=\beta\left(\frac{g}{\beta}-v^2\right).$$

Нетрудно установить, что $\sqrt{g/\beta}$ имеет размерность скорости; обозначим $\sqrt{g/\beta}=v_1$, $g/\beta=v_1^2$. Тогда

$$\frac{dv}{dt}=\beta\,(v_1^2-v^2). \qquad (7.16)$$

Точное решение дано в ответах к упражнению 1. Рассмотрим общие свойства решения. Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, которые были проведены для уравнения (7.9), показываем, что в этом случае должна установиться скорость движения $v_1=\sqrt{g/\beta}$. Покажем, что через достаточно большое время после начала падения справедлива формула

$$v-v_1=Ce^{-2\beta v_1 t}, \qquad (7.17)$$

где C — постоянная величина. Уравнение (7.16) перепишем так:

$$\frac{dv}{dt}=\beta\,(v_1+v)(v_1-v). \qquad (7.18)$$

При больших t $v\approx v_1$, поэтому в (7.18) заменим v_1+v на $2v_1$. Если заменить v на v_1 в разности v_1-v, получим $\frac{dv}{dt}=0$, откуда $v=\text{const}=v_1$. Так как нас интересует именно малое различие между v и v_1 (закон приближения v к v_1), то пренебрегать разностью $v-v_1$ нельзя. Итак, из (7.18) получим:

$$\frac{dv}{dt}=2\beta v_1(v_1-v). \qquad (7.19)$$

Положим $v_1-v=z$, $\frac{dz}{dt}=-\frac{dv}{dt}$. Уравнение (7.19) принимает вид

$$\frac{dz}{dt}=-2\beta v_1 z.$$

Его решение есть

$$z = Ce^{-2\beta v_1 t}, \qquad (7.20)$$

что совпадает с (7.17).

Значение C в формуле (7.20) нельзя определять из начального условия $v(0) = v_0$ (т. е. $z(0) = v_1 - v_0$), потому что уравнение (7.19) справедливо только при достаточно больших t (вблизи $t = 0$ заменять $v + v_1$ на $2v_1$ нельзя).

Заметим еще, что формула $F(t) = -\varkappa v^2(t)$ справедлива лишь для случая, когда $v > 0$. Действительно, если $v < 0$, то должно быть $F(t) = \varkappa v^2(t)$, так как сила сопротивления направлена противоположно скорости и, следовательно, положительна, если скорость отрицательна. Оба случая ($v > 0$ и $v < 0$) охватываются формулой

$$F(t) = -\varkappa v(t)\,|v(t)|.$$

Упражнения

1. Найти выражение скорости в зависимости от времени из уравнения $\frac{dv}{dt} = \beta(v_1^2 - v^2)$ при начальном условии $v(0) = v_0$. Из формулы для v показать, что происходит установление скорости, равной $v_1 = \sqrt{\frac{g}{\beta}}$. Показать, что для формулы (7.20) $C = \frac{2v_1(v_0 - v_1)}{v_1 + v_0}$.

2. В задаче о падении тела (сила сопротивления пропорциональна скорости) учесть, что на тело действует выталкивающая сила по закону Архимеда.

3. Применив результат предыдущей задачи к шару и учитывая, что для шара $k = 6\pi R\eta$, где R — радиус шара, η — вязкость среды, показать, что устанавливается (при больших t) скорость падения шара $v = \frac{2R^2 g(\rho - \rho')}{9\eta}$ (здесь ρ — плотность материала, из которого сделан шар, ρ' — плотность среды).

§ 8. Движение под действием упругой силы

Рассмотрим случай, когда сила, действующая на тело, зависит только от его положения: $F = F(x)$. Выше мы подробно рассматривали работу такой силы и выяснили, что в этом случае система имеет определенную потенциальную энергию $u(x)$, с которой сила связана соотношением

$$F(x) = -\frac{du(x)}{dx}.$$

Обратимся к задаче о движении тела под действием такой силы. Основное уравнение имеет вид

$$m\frac{dv}{dt}=F(x). \qquad (8.1)$$

Так как в уравнение входит производная по времени, а сила задана как функция координаты x, то непосредственно это уравнение решить нельзя. Естественно для решения задачи искать интересующие нас величины как функции координаты x. Будем искать, в частности, зависимость скорости от координаты, т. е. $v(x)$. Производную по времени $\frac{dv}{dt}$ мы тогда представим как производную сложной функции, так как сама координата x зависит от времени

$$\frac{dv\,[x\,(t)]}{dt}=\frac{dv\,[x\,(t)]}{dx}\,\frac{dx\,(t)}{dt}.$$

Но $\frac{dx}{dt}$ есть не что иное, как скорость $v(x)$. Таким образом, $\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$, откуда

$$m\frac{dv}{dt}=mv\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Подставляя последнее в уравнение движения (8.1), получим:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F(x). \qquad (8.2)$$

Интегрируя, находим:

$$\int_{v_0}^{v_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dx=\int_{x_0}^{x_1}F(x)\,dx$$

или

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{x_0}^{x_1}F(x)\,dx.$$

Физический смысл этого выражения совершенно ясен: изменение кинетической энергии равно работе силы.

При помощи потенциальной энергии запишем (8.2) в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=-\frac{du}{dx}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2}{2}+u(x)\right)=0.$$

Если производная какого-нибудь выражения тождественно равна нулю, то само это выражение есть постоянная величина. Поэтому

$$\frac{mv^2}{2}+u(x)=\text{const}. \qquad (8.3)$$

В таком виде формула (8.3) выражает закон сохранения энергии: при движении тела под действием силы, зависящей только от координаты, остается постоянной сумма кинетической энергии тела $\frac{mv^2}{2}$ и его потенциальной энергии $u(x)$. Эта сумма называется полной энергией тела. Здесь и в предыдущем параграфе мы привели эти довольно длинные преобразования с целью показать, что закон сохранения энергии (применительно к механике) есть следствие закона Ньютона. Также следствием закона Ньютона является тот факт, что кинетическая энергия тела есть именно $\frac{mv^2}{2}$, а не какая-нибудь другая функция скорости тела.

Как решать дальше задачу о движении тела? По значениям скорости v_0 и координаты тела x_0 в начальный момент времени находим полную энергию тела E — величину, остающуюся постоянной на протяжении всего движения $\frac{mv_0^2}{2}+u(x_0)=E$. При помощи формулы (8.3), зная E, находим скорость тела в зависимости от x

$$v(x)=\sqrt{\frac{2}{m}[E-u(x)]}. \qquad (8.4)$$

Остается найти связь между x и t. Из (8.4) получим:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-u(x)]};$$

отсюда

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-u(x)]}}=dt; \qquad t=t_0+\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-u(x)]}}.$$

Таким образом, время t выражено как функция координаты x:

$$t = t(x), \tag{8.5}$$

причем функция эта задана интегралом. Решая уравнение (8.5) относительно x, можно найти $x(t)$. Так как v выражается в зависимости от x посредством корня квадратного, то даже простое выражение $u(x)$ часто приводит к весьма сложным выражениям для $t(x)$.

Для того чтобы получить общее представление о характере движения, очень полезно нарисовать кривую $u(x)$. Если

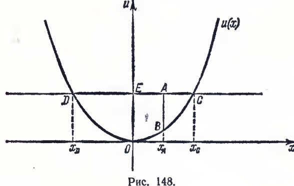


Рис. 148.

на этом же графике нанести горизонтальную линию на высоте E (рис. 148), то получится весьма наглядная картина. Скорость пропорциональна корню квадратному из разности $E - u(x)$. Так, например, при $x = x_A$ скорость пропорциональна корню квадратному из длины отрезка AB (рис. 148). Правее точки C и левее точки D находится область, где $E < u(x)$, т. е. область, в которую тело при заданной полной его энергии E проникнуть не может — не хватает энергии (формально корень из отрицательной величины дает для скорости мнимое значение). В той области, где $E > u(x)$, квадратный корень для $v(x)$ дает два возможных значения в соответствии с двумя знаками корня:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - u(x)]}.$$

В начальный момент как величина, так и знак v_0 определяются начальными условиями. Дальше движение происходит в направлении, заданном знаком начальной скорости v_0. Очевидно, что при $v \neq 0$ знак скорости не может внезапно измениться. Так, если в начальный момент тело находится в точке $x = x_1$ *) и $v_0 > 0$, то тело дойдет до крайней допустимой точки x_C. В этой точке, где скорость тела обращается в нуль, произойдет переход от формулы $v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - u(x)]}$ к формуле $v = -\sqrt{\frac{2}{m}[E - u(x)]}$. Так как в этой точке $v = 0$, то изменение знака совершается без скачка (разрыва) скорости. Аналогичная картина будет в точке $x = x_D$. Таким образом, в случае, изображенном на рис. 148, движение тела будет представлять собой колебания между двумя крайними положениями x_C и x_D.

Рассмотрим другой пример. Потенциальная энергия тела дается функцией $u = ax$ $(a > 0)$. Найти закон движения тела.

Пусть в начальный момент времени t_0 $x = x_0$, $v = v_0$. Тогда полная энергия $E = \frac{mv_0^2}{2} + ax_0$. Пользуясь (8.4), получаем:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{mv_0^2}{2} + ax_0 - ax\right]} = \sqrt{v_0^2 + \gamma(x_0 - x)},$$

где $\gamma = \frac{2a}{m}$. Зная $v(x)$, находим время

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \gamma(x_0 - x)}}.$$

В интеграле сделаем замену $v_0^2 + \gamma(x_0 - x) = z^2$, $2z\,dz = -\gamma\,dx$. Получим:

$$t = t_0 - \int_{v_0}^{\sqrt{v_0^2 + \gamma(x_0 - x)}} \frac{2dz}{\gamma} = t_0 - \frac{2}{\gamma}\left[\sqrt{v_0^2 + \gamma(x_0 - x)} - v_0\right].$$

*) Точка x_1 на рис. 148 не показана, она может находиться в любом месте между x_D и x_C.

Отсюда находим x:

$$\frac{\gamma}{2}(t-t_0)=-\sqrt{v_0^2+\gamma(x_0-x)}+v_0,$$

перенося v_0 влево, возводя в квадрат и сокращая на γ, получим:

$$x=-\frac{\gamma}{4}(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+x_0.$$

Найдя $\frac{d^2x}{dt^2}$, убеждаемся, что это — равнозамедленное движение. Этого и следовало ожидать, так как $F=-\frac{du}{dx}=-a$, сила постоянна и отрицательна, значит, движение

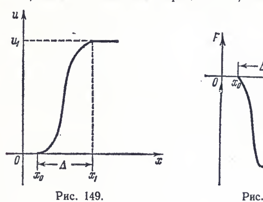


Рис. 149. Рис. 150.

равнозамедленное. В этом простейшем случае, когда сила в действительности от x не зависит, конечно, не было надобности применять такой сложный способ расчета.

В следующем примере рассмотрим потенциальную энергию, график которой имеет вид ступеньки (рис. 149). Такой зависимости $u(x)$ соответствует график силы, приведенный на рис. 150 (чтобы убедиться в этом, читатель должен вспомнить, что $F=-\frac{du}{dx}$), сила весьма велика и отрицательна, т. е. направлена в сторону уменьшения x. Чем круче $u(x)$ — кривая на рис. 149, т. е. чем на меньшем протяжении $\Delta=x_1-x_0$ происходит подъем $u(x)$, тем больше по

абсолютной величине сила. Там, где $u(x)$ постоянна (слева от точки x_0 и справа от точки x_1), сила равна нулю.

Пусть тело начало движение от точки x_0 (рис. 149) со скоростью v_0. Пусть полная энергия тела равна E. При каких значениях E тело может попасть в точку x_1? Так как $u(x_0)=0$, то $E=\frac{mv_0^2}{2}$. С другой стороны, $E=\frac{mv_1^2}{2}+u_1$, где v_1 — скорость тела в точке x_1, а u_1 — потенциальная энергия при $x=x_1$. Поэтому

$$\frac{mv_1^2}{2}=E-u_1. \tag{8.6}$$

Из формулы (8.6) видно, что если $E<u_1$, то тело не может попасть в точку x_1, так как в этом случае получаем $v_1^2<0$, а этого быть не может. Поэтому тело может попасть в точку $x=x_1$, только если $E\geqslant u_1$.

Определим для этого случая работу силы F при перемещении тела из точки x_0 в x_1

$$A=\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}-E.$$

Пользуясь (8.6), находим:

$$A=E-u_1-E=-u_1.$$

При дальнейшем движении тела вправо от точки x_1 сила F работы не совершает, так как $F=0$ при $x>x_1$.

Упражнения

1. Потенциальная энергия дана формулой $u=\frac{kx^2}{2}$ $(k>0)$. Построив график, показать, что соответствующее движение — колебательное.

2. Потенциальная энергия дана формулой

$$u(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant 0,\\ 2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$$

В начальный момент времени тело массой в 1 *г* выходит из начала координат и движется вправо со скоростью v_0 (*см/сек*): а) $v_0=1$, б) $v_0=1{,}9$, в) $v_0=2{,}1$. Для каждого случая указать, сможет ли тело неограниченно двигаться вправо. Если не может, найти точку остановки.

3. $u(x) = -x^3 + 4x^2$. В начальный момент времени тело массой в $2\,г$ выходит из точки x_0 и движется со скоростью v_0 (*см/сек*): а) $x_0 = 1$, $v_0 = 1$, б) $x_0 = -2$, $v_0 = 1$, в) $x_0 = -2$, $v_0 = -1$. В каждом случае исследовать характер движения (точки остановки, области, в которые тело не может попасть). В случаях, когда есть точки остановки, указать, хотя бы грубо, их координаты.

4. Аналогичные вопросы для $u(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $m = 2$: а) $x_0 = 0$, $v_0 = 2$, б) $x_0 = \frac{1}{2}$, $v_0 = \frac{1}{2}$. Выразить время t в зависимости от x через интеграл.

§ 9. Колебания

Рассмотрим тело, на которое действует сила

$$F = -kx.$$

Как мы знаем, такой силе соответствует потенциальная энергия

$$u = \frac{kx^2}{2}.$$

Начало координат является положением устойчивого равновесия. Кривая потенциальной энергии (парабола) имеет вид, показанный на рис. 148.

Движение тела под действием такой силы представляет собой колебания влево и вправо от положения равновесия. Можно представить себе шарик, который скатывается с одной ветки параболы, набирая скорость, по инерции забирается на вторую ветвь, скатывается с нее и т. п. Согласно второму закону Ньютона уравнение этих колебаний имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{9.1}$$

Мы не будем решать его общим, но довольно сложным способом предыдущего параграфа, а вместо этого «угадаем» вид решения и сосредоточим внимание на исследовании свойств этого решения.

Итак, предположим, что

$$x = a\cos\omega t. \tag{9.2}$$

Такой вид решения выбран потому, что косинус является одной из простейших периодических функций.

Подставим выражение (9.2) в основное уравнение (9.1); так как

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega t,$$

то

$$-ma\omega^2 \cos \omega t = -ka \cos \omega t. \qquad (9.3)$$

Соотношение (9.3) будет справедливо при любом t, если $m\omega^2 = k$. Поэтому функция (9.2) действительно удовлетворяет уравнению, если $m\omega^2 = k$, откуда $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тогда

$$x = a \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\right). \qquad (9.4)$$

Отметим, что квадратный корень в выражении ω не приводит к двум решениям, так как $\cos \omega t = \cos(-\omega t)$.

Найдем период колебаний, т. е. время, через которое тело возвращается в исходное положение с исходной скоростью. Функция $\cos \varphi$ возвращается к начальному значению, когда угол φ делает полный оборот, т. е. меняется на 2π. Значит, в выражении $a \cos \omega t$ величина ωt за один период T также должна меняться на 2π. Поэтому T находим из условия

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi.$$

Отсюда

$$\omega T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (9.5)$$

Величина $\nu = \frac{1}{T}$ дает число колебаний в единицу времени и называется частотой колебаний. Размерность ее 1/*сек* (словами: обратная секунда). Единица частоты — одно колебание в секунду имеет специальное название *герц* в честь немецкого физика Генриха Герца. Из формулы (9.5) видно, что $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Однако во всех формулах удобнее иметь дело именно с ω, а не с ν, иначе повсюду появится

коэффициенты 2π и $4\pi^2$. Величина $\omega = \frac{2\pi}{T}$ называется круговой частотой *).

Константу a из уравнения (9.1) определить нельзя, потому что уравнение удовлетворяется при любом a (в обеих частях (9.3) a можно сократить).

Скорость тела $v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t$. Из соотношения $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$ следует, что при $\cos \omega t = \pm 1$ будет $\sin \omega t = 0$. Следовательно, в те моменты времени, когда отклонение тела в ту или другую сторону достигает своей наибольшей величины ($x = a$ или $x = -a$), скорость v равна нулю. Представим себе, что при $t < 0$ тело помещено в точку $x = a$ и удерживалось в этой точке в покое при помощи другой посторонней силы (например, каким-нибудь крючком) до момента $t = 0$, когда крючок отпускает тело. В этот момент тело было в покое и под действием силы $F = -kx$ начались колебания. В этом случае зависимость координаты тела x от времени t дается формулой $x = a \cos \omega t$. Так как абсолютная величина $\cos \omega t$ не превосходит 1, то a есть наибольшее значение величины x, т. е. наибольшее отклонение тела от положения равновесия. Число a называется амплитудой колебаний. Таким образом, амплитуда колебаний равна начальному отклонению тела, если в момент начала колебаний тело покоилось **).

*) Чтобы понять происхождение этого названия, рассмотрим отрезок длиной a, вращающийся против часовой стрелки. Сходство между вращением и колебанием легко обнаружить: вращающаяся стрелка после каждого оборота возвращается в исходное положение точно так же, как колеблющееся тело по истечении одного периода возвращается в свое исходное положение. При этом координата x конца вращающейся стрелки меняется по закону $x = a \cos \omega t$, если стрелка вращается с угловой скоростью ω. В случае вращения, если T есть период одного оборота, то $\nu = \frac{1}{T}$ есть число оборотов в единицу времени, $\omega = 2\pi\nu$ есть угловая скорость вращения, выраженная в радианах в секунду. Так как радиан есть величина безразмерная, то ω имеет размерность $1/сек$. В связи с таким простым смыслом ω при движении по кругу величина ω в задачах о колебаниях получила название круговой частоты.

**) Мы определили амплитуду, как *половину* полного размаха колебаний. На пути от крайней левой точки, $x = -a$, до крайней правой точки, $x = +a$, тело проходит расстояние $2a$, равное *удвоенной* амплитуде.

Отметим попутно, что, вообще, если $A(t)=L\cos\omega t$ (или $A(t)=L\sin\omega t$), то L есть наибольшее значение величины $A(t)$, оно называется амплитудой величины $A(t)$.

Отметим еще, что частота колебаний ω не зависит от их амплитуды a.

Пусть $x=x_1(t)$ есть решение уравнения (9.1), т. е. справедливо равенство $m\frac{d^2x_1}{dt^2}=-kx_1$. Рассмотрим функцию $x_2(t)=Cx_1(t)$, где C — постоянная величина. Подставляя в уравнение (9.1) значение x_2 и $\frac{d^2x_2}{dt^2}$, получим $mC\frac{d^2x_1}{dt^2}=-kCx_1(t)$ или, сокращая на C,

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}=-kx_1.$$

Итак, если $x=x_1(t)$ удовлетворяет уравнению (9.1), то и $x_2(t)=Cx_1(t)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Легко убедиться, что уравнение (9.1) имеет и другое решение $x(t)=b\sin\omega t$. Действительно, $\frac{d^2(\sin\omega t)}{dt^2}=-\omega^2\sin\omega t$. Подставляя значение x и его второй производной в (9.1) и сокращая на $\sin\omega t$, получим $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, т. е. то же самое значение, что и раньше*). Поэтому

$$x(t)=b\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right). \tag{9.6}$$

Так же как и в предыдущем случае, b из уравнения (9.1) определить нельзя. Оно определяется из начальных условий. Пусть в начальный момент $t=0$ тело находилось в точке $x=0$ и получило определенную начальную скорость v_0 в результате кратковременного действия какой-то внешней силы, например удара. Тогда, так как $v(t)=b\omega\cos\omega t$, то при $t=0$

$$v_0=b\omega, \tag{9.7}$$

---

*) Здесь также $\omega=-\sqrt{\frac{k}{m}}$ не дает нового решения, так как $b\sin\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)=-b\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$; знак минус у корня, выражающего ω, соответствует тому же виду функции, что и раньше, при другом значении константы b.

откуда $b=\frac{v_0}{\omega}$. Следовательно, амплитуда в этом случае определяется начальной скоростью.

Соотношение (9.7) дает практически удобный способ измерения импульса силы и скорости, широко применяемый в механике под названием баллистического маятника: если тело подвешено в виде маятника или удерживается в положении равновесия пружинами и частота его колебаний известна, то начальную скорость после удара можно определить по амплитуде колебаний, вызванных ударом.

Покажем, что приближенно формулу (9.7) можно получить из общих элементарных соображений. Размерность амплитуды — *см*, размерность скорости — *см/сек*, а размерность времени — *сек*. Поэтому из соображений размерности амплитуда должна быть величиной такого же порядка, как произведение начальной скорости на некоторую долю периода. Так как движение от момента удара до максимального отклонения продолжается четверть периода и $v < v_0$, потому что движение замедленное, то $b < v_0 T/4$. Если бы движение было с постоянным замедлением, то средняя скорость равнялась бы половине начальной и, следовательно, $b \approx v_0 T/8$. В действительности, как следует из формул (9.7) и (9.5),

$$b=\frac{v_0}{\omega}=\frac{v_0 T}{2\pi}=\frac{v_0 T}{6,28}.$$

Важно то, что благодаря независимости периода колебаний от амплитуды последняя прямо пропорциональна начальной скорости.

Мы проверили, что две различные функции (9.4) и (9.6) удовлетворяют уравнению $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$. Пусть мы хотим решить задачу о движении тела с заданным начальным положением и данной начальной скоростью: при $t=0$ $x=x_0$, $v=v_0$ (причем значения x_0 и v_0 — любые, каждое из них может не равняться нулю). Такую задачу назовем общей. До сих пор в отличие от общей задачи мы рассматривали лишь частные задачи. В одной из них было при $t=0$ $v=0$, $x=x_0$, а в другой — при $t=0$ $v=v_0$, $x=0$.

Допустим, что мы взяли решение $x=a\cos\omega t$. Полагая $t=0$, получим $x_0=a$; значит, $x=x_0\cos\omega t$. Но тогда

$v=\frac{dx}{dt}=-x_0\omega\sin\omega t$, так что при $t=0$ $v=0$, а не v_0. Поэтому при помощи решения $x=a\cos\omega t$ мы не можем решить общей задачи, а можем решить лишь задачу с нулевой скоростью.

Попробуем взять решение $x=b\sin\omega t$. В этом случае $v=\frac{dx}{dt}=b\omega\cos\omega t$, при $t=0$ получаем $v_0=b\omega$, $b=\frac{v_0}{\omega}$, откуда $x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$. Однако при $t=0$ $x=0$, а не x_0. Следовательно, и при помощи этого решения мы не можем решить общую задачу.

Легко убедиться, что сумма

$$x=a\cos\omega t+b\sin\omega t \tag{9.8}$$

также является решением уравнения (9.1) при любых a и b [читатель сам проверит это, находя вторую производную от суммы (9.8) и подставляя ее в (9.1)]. Таким образом, мы располагаем решением с двумя произвольными постоянными: $x=a\cos\omega t+b\sin\omega t$. Соответствующая скорость $v=-a\omega\sin\omega t+b\omega\cos\omega t$.

При помощи (9.8) можно решить общую задачу о движении тела с произвольным положением и произвольной скоростью в начальный момент: при $t=0$ $x=x_0$, $v=v_0$. Пользуясь начальными данными, находим из (9.8) $a=x_0$, $b=\frac{v_0}{\omega}$. Поэтому

$$x=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Из всего этого следует, что решения $x=a\cos\omega t$, $x=b\sin\omega t$ дают возможность решить не общую задачу о движении, а лишь частные задачи со специальными начальными условиями. Поэтому эти решения называются частными. Решение же $x=a\cos\omega t+b\sin\omega t$ позволяет решить общую задачу о движении, задачу с любыми начальными условиями. Поэтому это решение называется общим решением.

Общее решение с двумя произвольными постоянными можно получить из других соображений. В уравнении (9.1) вместо независимой переменной t введем новую независимую переменную τ по формуле

$$\tau=t+t', \tag{9.9}$$

где t' — постоянная. Тогда $\frac{dx}{d\tau}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\frac{dx}{dt}$, так как из (9.9) видно, что $\frac{dt}{d\tau}=1$. Аналогично $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{d\tau^2}$. Уравнение (9.1) принимает вид

$$m\frac{d^2x}{d\tau^2}=-kx.$$

Нам известно его решение $x=C\cos\omega\tau$, где C — постоянная, $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. Возвращаясь к переменной t, получим $x=C\cos\omega(t+t')=C\cos(\omega t+\omega t')$. Положим $\omega t'=\alpha$, тогда

$$x=C\cos(\omega t+\alpha). \tag{9.10}$$

Используя формулу $\cos(\alpha+\beta)=\cos a\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, сравним решения (9.10) и (9.8)

$$C\cos(\omega t+\alpha)=C\cos\alpha\cos\omega t-C\sin\alpha\sin\omega t=$$
$$=a\cos\omega t+b\sin\omega t.$$

Следовательно, чтобы оба решения описывали одно и то же движение, нужно удовлетворить условиям

$$a=C\cos\alpha,\quad b=-C\sin\alpha.$$

Поскольку a и b легко выражаются через начальное положение и начальную скорость, полезно уметь решать обратную задачу: находить C и α, зная a и b. Для этого составим выражения

$$a^2+b^2=C^2\cos^2\alpha+C^2\sin^2\alpha=C^2,$$

откуда

$$C=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{9.11}$$
$$-\frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right).$$

Если решение записано в форме (9.10), то ясно, что амплитуда колебаний равна C. Следовательно, если решение имеет вид (9.8), то амплитуда равна $\sqrt{a^2+b^2}$. Пусть при $t=0$ $x=x_0$, $v=v_0$, тогда $a=x_0$, $b=\frac{v_0}{\omega}$, поэтому амплитуда колебаний равна $\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$.

Упражнения

1. Тело колеблется по закону $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$. Найти зависимость $x(t)$ и определить период колебаний для следующих случаев: а) при $t=0$ $x=0$, $v=2$ *см/сек*; б) при $t=0$ $x=1$, $v=0$; в) при $t=0$ $x=1$, $v=2$ *см/сек*. В случае в) записать решение как в виде (9.8), так и в виде (9.10).

§ 10. Энергия колебаний. Затухающие колебания

Запишем общее решение уравнения (9.1) в виде

$$x = C\cos(\omega t + \alpha). \tag{9.10}$$

Потенциальная энергия тела в каждый момент равна

$$u(x(t)) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{kC^2}{2}\cos^2(\omega t + \alpha),$$

а кинетическая энергия

$$K(t) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}[-C\omega\sin(\omega t + \alpha)]^2 = \frac{mC^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \alpha).$$

Частота колебаний, как мы уже знаем, определяется формулой $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Подставляя ω^2 в выражение кинетической энергии, получим:

$$K(t) = \frac{kC^2}{2}\sin^2(\omega t + \alpha).$$

Таким образом, множитель перед тригонометрической функцией в выражении потенциальной энергии и в выражении кинетической энергии одинаков. Сами функции $\cos^2(\omega t + \alpha)$

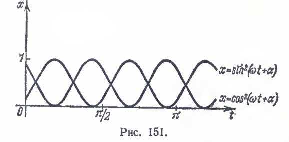


Рис. 151.

и $\sin^2(\omega t + \alpha)$ очень похожи одна на другую, одна может быть получена из другой смещением по оси времени на $\Delta t = \frac{\pi}{2\omega}$ (рис. 151). Каждая из величин u и K колеблется

от максимального значения до нуля, причем, когда одна величина максимальна, другая равна нулю. Отметим, что функции $\cos^2(\omega t+\alpha)$ и $\sin^2(\omega t+\alpha)$ описывают колебания вокруг среднего значения, равного половине максимального. Это обстоятельство легко усмотреть как из рис. 151, так и из известных формул

$$\cos^2\beta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\beta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\beta,$$

$$\sin^2\beta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\beta.$$

Здесь ясно, что величина $\frac{1}{2}\cos 2\beta$ колеблется, становясь то положительной, то отрицательной, а $\frac{1}{2}$ представляет собой среднее значение.

Сумма потенциальной и кинетической энергии, т. е. полная энергия системы

$$E=K+u=\frac{kC^2}{2}[\cos^2(\omega t+\alpha)+\sin^2(\omega t+\alpha)]=\frac{kC^2}{2}$$

постоянна, как и следовало ожидать.

Отметим, что если бы мы задались движением с частотой, *не* удовлетворяющей формуле $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, то при таком движении сумма потенциальной и кинетической энергии не была бы постоянна, максимальная кинетическая энергия не равнялась бы максимальной потенциальной энергии. Это не удивительно, так как колебания с частотой, отличающейся от $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, не удовлетворяют основному уравнению движения; следовательно, для того чтобы такие колебания осуществлялись, необходимо, чтобы, кроме силы $F=-kx$ *), на тело действовали еще какие-то другие, внешние силы; за счет работы внешних сил полная энергия $\left(\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)$ уже не сохраняется.

Обратимся к вопросу о затухании колебаний. Пусть, кроме силы пружины $F=-kx$, на тело действует сила

*) Этой силе соответствует потенциал $u(x)=\frac{kx^2}{2}$.

трения. Предположим, что сила трения сравнительно мала, так что на протяжении одного периода колебаний работа силы трения мала по сравнению с энергией колебаний; тогда приближенно можно считать, что колебания происходят так же, как и в отсутствие силы трения:

$$x(t) = C\cos(\omega t + \alpha).$$

Энергия колебаний равна $\frac{kC^2}{2}$. При наличии силы трения энергия колебаний с течением времени уменьшается. Следовательно, трение приведет к тому, что коэффициент C при $\cos(\omega t + \alpha)$ будет не постоянной, а медленно убывающей величиной. Закон убывания C определится условием, что уменьшение энергии равно работе силы трения.

Относя обе величины к единице времени, получим:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\left(\frac{kC^2}{2}\right)}{dt} = kC\frac{dC}{dt} = F_1 v = W_1, \qquad (10.1)$$

где F_1 — сила трения, v — скорость тела, W_1 — мощность силы трения. Скорость v, так же как и сила F_1, в процессе колебаний периодически меняется. Произведение $F_1 v$ все время остается отрицательным. В интересующем нас случае малого трения, т. е. медленного затухания колебаний, можем считать, что изменение амплитуды $C(t)$ за время нескольких колебаний мало.

Под произведением $F_1 v$ надо понимать среднее значение этого произведения за период. Формула (10.1) справедлива только для промежутков времени, превышающих период колебаний.

Рассмотрим в качестве примера силу трения, пропорциональную скорости движения тела:

$$F_1 = -hv, \quad F_1 v = -hv^2.$$

Подставив $v = -C\omega\sin(\omega t + \alpha)$, получим:

$$F_1 v = -hC^2\omega^2\sin^2(\omega t + \alpha).$$

Заметим, что среднее значение $\sin^2(\omega t + \alpha)$ за период равно $\frac{1}{2}$ (см. упражнения к § 4 главы III, а также формулы

на странице 368). Пользуясь (10.1), получаем окончательно:

$$kC\frac{dC}{dt} = -hC^2\omega^2\cdot\frac{1}{2},$$

откуда

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{h\omega^2}{2k}C.$$

Вспоминая, что $\omega^2 = \frac{k}{m}$, получим более простое выражение:

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{h}{2m}C.$$

Решение этого уравнения есть

$$C = C_0 e^{-\frac{h}{2m}t}. \qquad (10.2)$$

Здесь C_0 определяется из начальных условий. Умножая обе части (10.2) на $\cos(\omega t + \alpha)$ и пользуясь (9.10), получаем:

$$x(t) = C_0 e^{-\frac{h}{2m}t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad (10.3)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Это — приближенная формула, полученная в предположении, что сила трения невелика и пропорциональна скорости.

В случае, когда сила трения пропорциональна скорости, задача имеет точное решение. На тело действуют в этом случае две силы: $-kx$ и $h\frac{dx}{dt}$. В силу второго закона Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - h\frac{dx}{dt}. \qquad (10.4)$$

Решение $x(t)$ будем искать в таком же виде, как оно было получено для малой силы трения,

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \alpha). \qquad (10.5)$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma C_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \alpha) - C_0\omega_1 e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \alpha),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma^2 C_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \alpha) + \gamma C_0\omega_1 e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \alpha) + $$
$$+ C_0\omega_1\gamma e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \alpha) - C_0\omega_1^2 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \alpha).$$

Подставляя выражение для x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ в (10.4) и сокращая на $C_0 e^{-\gamma t}$, получим:

$$m\gamma^2 \cos(\omega_1 t+\alpha) + m\gamma\omega_1 \sin(\omega_1 t+\alpha) + \\ + m\gamma\omega_1 \sin(\omega_1 t+\alpha) - m\omega^2 \cos(\omega_1 t+\alpha) = \\ = -k\cos(\omega_1 t+\alpha) + h\gamma\cos(\omega_1 t+\alpha) + h\omega_1 \sin(\omega_1 t+\alpha)$$

или

$$[m\gamma^2 - m\omega_1^2]\cos(\omega_1 t+\alpha) + 2m\gamma\omega_1 \sin(\omega_1 t+\alpha) = \\ = -[k-h\gamma]\cos(\omega_1 t+\alpha) + h\omega_1 \sin(\omega_1 t+\alpha). \quad (10.6)$$

Равенство (10.6) будет выполнено при любом t, если

$$\left.\begin{aligned} m\gamma^2 - m\omega_1^2 &= -k + h\gamma, \\ 2m\gamma\omega_1 &= +h\omega_1. \end{aligned}\right\} \quad (10.7)$$

Из второго уравнения (10.7), сократив на ω_1, получим:

$$\gamma = +\frac{h}{2m}. \quad (10.8)$$

Тогда из первого уравнения

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}. \quad (10.9)$$

Следовательно,

$$x(t) = C_0 e^{-\frac{h}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}\, t + \alpha\right). \quad (10.10)$$

В случае, когда трение мало, т. е. число h мало по сравнению с k, можно под корнем пренебречь членом $\frac{h^2}{4m^2}$ по сравнению с $\frac{k}{m}$. При этом формула (10.10) переходит в (10.3). Следовательно, в приближенном рассмотрении мы верно получили закон уменьшения амплитуды, но не заметили малого изменения частоты колебания, вызванного силой трения.

Если трение велико, то подкоренное выражение может стать отрицательным, формулы теряют смысл. Это означает, что при сильном трении движение уже не имеет колебательного характера. В этом случае решение надо искать в виде $x = Ce^{-\gamma t}$. Подставив в уравнения, получим два значения γ.

Сумма двух решений, соответствующих этим γ, даст нам общее решение, позволит решить задачу с любыми начальными данными. Подробно этот случай рассмотрен в связи с электрическими колебаниями в § 10 главы VIII.

Упражнения

1. Найти закон затухания колебаний при силе трения, пропорциональной квадрату скорости (такое трение характерно для быстрого движения тела в жидкости с малой вязкостью). Показать, что по истечении большого промежутка времени амплитуда $C(t) = 1/bt$, где b — постоянное число, не зависящее от C_0 — значения амплитуды в начальный момент времени.

2. Найти закон затухания колебаний для силы трения, не зависящей от скорости (такая сила трения характерна для трения сухих твердых поверхностей одна о другую). Определить время, по истечении которого колебания прекратятся.

3. Получить уравнение малых колебаний маятника, т. е. материальной точки, подвешенной на нити длины l. Малыми колебаниями мы будем называть отклонения на небольшой угол, иначе говоря, такие колебания, что величина отклонения по горизонтали x мала по сравнению с l. Найти период колебаний.

Указание. Воспользоваться тем, что сумма кинетической и потенциальной энергии есть величина постоянная.

§ 11. Вынужденные колебания и резонанс

Рассмотрим тело, на которое действует упругая сила $F = -kx$. Мы установили, что под действием этой силы тело колеблется с определенной частотой $\omega = \sqrt{k/m}$, так называемой частотой свободных колебаний или собственной частотой. В дальнейшем будем обозначать собственную частоту через ω_0, так что $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Пусть на тело действует, кроме упругой силы, еще и периодическая внешняя сила с частотой ω. Тогда оказывается, что амплитуда колебаний, вызванных внешней силой, весьма сильно зависит от того, насколько частота внешней силы ω близка к частоте свободных колебаний. Это явление носит название резонанса и имеет очень большое практическое значение. Явление это относится к любым системам, в которых возможны колебания. В механических системах (станках, моторах) такие колебания могут приводить к опасным деформациям и разрушению.

Иногда резонанс сознательно используют для того, чтобы малой силой вызвать колебания рабочего инструмента с большой амплитудой.

В электрических системах резонанс дает возможность при действии нескольких периодических сил с разной частотой (например, нескольких передающих радиостанций) добиться того, чтобы колебания в нашей системе зависели только от одной из периодических сил — той, частота которой близка к собственной частоте системы. Благодаря этому можно настраивать радиоприемник на определенную станцию.

Составим уравнение колебаний

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - h\frac{dx}{dt} + f\cos\omega t. \qquad (11.1)$$

В этом уравнении $f\cos\omega t$ есть внешняя сила.

Поделим обе части (11.1) на m и обозначим теперь $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ в соответствии с тем, что с такой частотой происходят собственные колебания тела (в отсутствие трения); отношение $\frac{h}{m}$ обозначим 2γ [см. предыдущий параграф, формулы (10.8) и (10.9)]. Получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\frac{dx}{dt} + \frac{f}{m}\cos\omega t.$$

Естественно ожидать, что под действием силы с частотой ω тело будет совершать колебания с той же частотой. Поэтому ищем решение в виде

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t. \qquad (11.2)$$

Подставляя выражения для x и его производных в уравнение (11.1), получим:

$$-a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t = -a\omega_0^2\cos\omega t - b\omega_0^2\sin\omega t + \\ + 2\gamma a\omega\sin\omega t - 2\gamma b\omega\cos\omega t + \frac{f}{m}\cos\omega t.$$

Для того чтобы это равенство было верно при любых t, должны быть равны между собой в отдельности члены с $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$. Приравнивая эти члены, получаем:

$$\left.\begin{aligned} -a\omega^2 &= -a\omega_0^2 - 2\gamma b\omega + \frac{f}{m}, \\ -b\omega^2 &= -b\omega_0^2 + 2\gamma a\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (11.3)$$

Из второго уравнения (11.3) находим:

$$b = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} a.$$

Подставляя это в первое уравнение (11.3), находим:

$$a = \frac{f}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (11.4)$$

Тогда

$$b = \frac{f}{m} \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (11.5)$$

Переходя к виду $x = C\cos(\omega t + \alpha)$ и вспоминая, что

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (9.11)$$

получаем амплитуду C колебаний, вызванных внешней силой,

$$C = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}. \quad (11.6)$$

Отсюда видно, что C тем больше, чем ближе ω к ω_0. Кривая зависимости C от ω при данном ω_0 изображена на рис. 152 при двух значениях γ. Принято $\frac{f}{m} = 1$, $\omega_0 = 1$. Чем меньше трение, тем резче выражен подъем амплитуды колебаний при равенстве частоты внешней силы и собственной частоты.

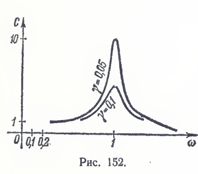


Рис. 152.

Нетрудно убедиться, что сумма решения (10.5) уравнения (10.4) и общего решения (11.2) уравнения (11.1)

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t + C_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \alpha), \quad (11.7)$$

где a и b даются формулами (11.4) и (11.5), также является решением уравнения (11.1). При помощи этого решения можно решить задачу с любыми начальными данными,

выбирая соответственно C_0 и α. Действительно, пусть при $t=0$, $x=x_0$, $v=v_0$. Тогда, пользуясь (11.7), находим:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a + C_0 \cos\alpha, \\ v_0 &= b\omega - C_0(\gamma\cos\alpha + \omega_1 \sin\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

Из этой системы уравнений можно определить C_0 и α (см. упражнения). Таким образом, (11.7) есть общее решение задачи о колебаниях тела под действием упругой силы и периодической внешней силы. Это общее решение подтверждает сделанное в начале параграфа предположение о том, что при длительном воздействии внешней силы с частотой ω тело будет колебаться с той же частотой ω. В самом деле, каковы бы ни были начальные условия, они влияют только на значения C_0 и α, т. е. только на последнее слагаемое решения (11.7). Однако с течением времени это слагаемое, имеющее частоту ω_1, становится сколь угодно близким к нулю за счет множителя $e^{-\gamma t}$ и им можно пренебречь при больших t. Оставшиеся слагаемые описывают колебания с частотой ω, которые не затухают с течением времени, потому что они поддерживаются действием внешней силы.

Упражнения

1. Определить C_0 и α из системы (11.8)
2. Благодаря наличию трения максимальная амплитуда C получается при ω^2_{max}, несколько отклоняющемся от ω_0^2.

Найти отклонение $\omega^2_{max}/\omega_0^2$ от 1 в зависимости от γ.

Указание. Исследовать на минимум подкоренное выражение в (11.6), обозначив $\omega^2=z$.

§ 12. О точных и приближенных решениях физических задач

В предыдущем параграфе нам посчастливилось сравнительно просто найти точное решение задачи о колебаниях тела под действием периодической внешней силы при наличии возвращающей силы $(-kx)$ и силы трения $\left(-h\frac{dx}{dt}\right)$. Располагая этим точным решением, можно легко найти ряд важных предельных случаев.

1) Частота внешней силы ω весьма мала по сравнению с ω_0, где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Пренебрегая в формуле (11.6) ω по сравнению с ω_0, получаем $C = \frac{f}{m\omega_0^2} = \frac{f}{k}$.

2) Частота внешней силы ω весьма велика и значительно больше ω_0. Тогда $C = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 4\gamma^2\omega^2}}$. Но $\gamma^2\omega^2 \ll \omega^4$ (трение не очень велико); пренебрегая членом $4\gamma^2\omega^2$, получаем $C = \frac{f}{m\omega^2}$.

3) Сила трения мала. Пренебрегая членом, содержащим γ, получаем:

$$C = \frac{f}{m} \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}. \tag{12.1}$$

Мы берем абсолютную величину, так как рассматриваем положительное значение корня в формуле (11.6).

4) Явление точного резонанса: частота внешней силы в точности равна собственной частоте, т. е. $\omega = \omega_0$. Тогда

$$C = \frac{f}{m} \frac{1}{2\gamma\omega} = \frac{f}{h\omega} = \frac{f}{h\omega_0}. \tag{12.2}$$

Совокупность этих предельных случаев, в сущности, составляет больше 90% содержания всех полученных результатов. Получив общий результат, всегда необходимо его упростить, рассматривая различные предельные случаи, как мы это сделали выше. Простые формулы, относящиеся к предельным случаям, легче запоминаются и чаще используются на практике. Лишь изредка приходится прибегать к общим формулам. Зная предельные случаи, мы знаем хотя и не все, но *почти* все, что содержится в более сложной точной формуле.

Возникает вопрос, нельзя ли было эти предельные формулы получить прямо, производя упрощение в самом уравнении. Решать точно сложное уравнение и потом упрощать решение так же неразумно, как при помощи сложных машин аккуратно упаковывать вместе и заворачивать в изящную обертку несколько предметов, а потом руками рвать эту обертку и пользоваться этими предметами в отдельности.

Прямое получение предельных (приближенных) выражений особенно важно еще потому, что точное решение очень чувствительно к малейшим изменениям постановки задачи. Достаточно немного усложнить задачу, и точное решение уже не удается найти. Приближенное решение более грубо, но и более устойчиво относительно изменения задачи.

Особенно важны для учащегося те случаи, когда представляется возможным получить и сравнить между собой оба решения — точное и приближенное. Именно на таких случаях можно приобрести опыт правильного выбора приближений и уверенность в результатах.

Вернемся к первому случаю: частота внешней силы мала. Очевидно, мы имеем дело с медленным движением. Поэтому в исходном уравнении

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - h\frac{dx}{dt} + f\cos\omega t \qquad (11.1)$$

опустим члены, связанные с движением: $m\frac{d^2x}{dt^2}$ и $h\frac{dx}{dt}$. Получим:

$$0 = -kx + f\cos\omega t,$$

откуда

$$x = \frac{f\cos\omega t}{k} = C\cos\omega t,\ C = \frac{f}{k}.$$

Таким образом, при малой частоте в каждый момент приложенная внешняя сила уравновешивается силой упругости. Ясно, что этот результат является весьма общим: он относится к любому движению с малой частотой. Такой предельный случай называется статическим. В частности, сила упругости может быть любой функцией координаты $[F(x)]$, внешняя сила может быть любой функцией времени $[F_1(t)]$. Уравнение колебаний принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) - h\frac{dx}{dt} + F_1(t). \qquad (12.3)$$

Точное решение этого уравнения можно получить не всегда, но приближенный подход сохраняется. Действительно, пренебрегая в случае медленного движения членами со скоростью и ускорением, получаем из (12.3)

$$F(x) + F_1(t) = 0.$$

Отсюда находим $x(t)$ — приближенную зависимость между x и t. Подставляя это $x(t)$ в точное уравнение (12.3), можно найти, какого порядка ошибку мы допустили, пренебрегая членами $m\frac{d^2x}{dt^2}$ и $h\frac{dx}{dt}$.

Обратимся ко второму предельному случаю—очень большой частоты ω. При большой частоте время действия внешней силы, а следовательно, и импульс силы за каждый полупериод (пока сила действует в одном направлении) малы, потому что мала длительность полупериода. Значит, при данной амплитуде силы f, чем больше ω, тем меньше скорость, которую может набрать тело, и тем меньше перемещение тела. Пренебрегая в уравнении членами kx и $h\frac{dx}{dt}$, получим уравнение движения свободного тела, на которое не действуют никакие силы, кроме внешней силы,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f\cos\omega t. \tag{12.4}$$

Будем искать решение уравнения (12.4) в виде

$$x=C\cos\omega t.$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-C\omega^2\cos\omega t.$$

Подставляя в (12.4), получаем:

$$-Cm\omega^2\cos\omega t=f\cos\omega t,$$

откуда

$$C=-\frac{f}{m\omega^2}.$$

Поэтому

$$x=-\frac{f}{m\omega^2}\cos\omega t. \tag{12.5}$$

В стандартном виде $x=C\cos(\omega t+\alpha)$ решение (12.5) можно записать так, чтобы C было положительным,

$$x=\frac{f}{m\omega^2}\cos(\omega t+\pi).$$

При этом упругая сила есть

$$-kx=\frac{kf}{m\omega^2}\cos\omega t=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}f\cos\omega t.$$

Сила трения

$$h\frac{dx}{dt}=\frac{hf}{m\omega}\sin\omega t.$$

При сравнении сил, периодически зависящих от времени, нужно сравнивать не мгновенные их значения, а амплитуды. Отношение внешней силы к упругой силе (отношение амплитуд) равно

$$\frac{\omega^2 f}{\omega_0^2 f}=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

Это отношение тем больше, чем больше ω. Аналогично и отношение внешней силы к силе трения неограниченно растет с ростом ω. Поэтому при больших ω внешняя сила значительно превосходит как упругую силу, так и силу трения. Этим подтверждается возможность приближенного рассмотрения движения под действием одной только внешней силы *).

Третий предельный случай — пренебрежение трением — легко получается непосредственно

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+f\cos\omega t=-m\omega_0^2x+f\cos\omega t. \quad (12.6)$$

Решение уравнения (12.6) ищем в виде $x=C\cos(\omega t+\alpha)$. Подставляя в уравнение выражения для x и $\frac{d^2x}{dt^2}$, получаем:

$$\alpha=0, \quad m(\omega_0^2-\omega^2)\,C\cos\omega t=f\cos\omega t,$$

откуда

$$C=\frac{f}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

Рассмотрим четвертый случай — частота внешней силы в точности равна собственной частоте колебаний, $\omega=\omega_0$.

Будем искать решение уравнения (11.1) в виде

$$x=C\cos(\omega_0 t+\alpha).$$

Тогда

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mC\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\alpha).$$

*) Существенно, что рассмотренная выше сила трения тем ближе к нулю, чем ближе скорость к нулю. При сухом трении (сила трения не зависит от скорости) внешняя сила меньшая, чем сила трения, не вызовет колебаний ни при какой частоте.

Вспоминая, что $\omega_0^2 = k/m$, получаем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kC\cos(\omega_0 t + \alpha) = -kx.$$

Подставляя в (11.1) выражения для x и его производных, получим:

$$hC\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) + f\cos\omega_0 t = 0.$$

Последнее равенство будет справедливо при любом t, если

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{f}{h\omega_0}.$$

Решение, следовательно, есть

$$x = \frac{f}{h\omega_0}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{12.7}$$

Амплитуда колебаний при резонансе $C = f/h\omega_0$.

Изобразим на чертеже зависимость C от ω, даваемую приближенными формулами (12.1) и (12.2) (рис. 153). Формула (12.1) дает две ветви, уходящие в бесконечность при $\omega = \omega_0$; формула (12.2) дает при $\omega = \omega_0$ конечное значение $C = A$. Построив кривые (12.1) и поставив точку A, соответствующую формуле (12.2), уже нетрудно от руки провести гладкую кривую (пунктир на рис. 118), которая вдали от резонанса совпадает с кривыми (12.1) и имеет максимум A в точке ω_0.

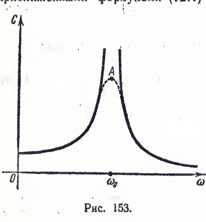


Рис. 153.

Амплитуду C и начальную фазу α в случае резонанса (четвертый случай) можно определить при помощи энергетических соображений, ценность которых заключается в том, что они позволяют приближенно решить также и некоторые задачи, не имеющие точного решения.

Мощность, развиваемая внешней силой $f\cos\omega t$ при движении, заданном выражением $x = C\cos(\omega t + \alpha)$, есть

$$W_{вн} = f\cos\omega t\frac{dx}{dt} = -fC\omega\cos\omega t\sin(\omega t + \alpha).$$

Определим среднюю мощность внешней силы за большой (точнее говоря, за бесконечный) промежуток времени

$$\overline{W}_{вн} = -fC\omega\,\overline{\cos\omega t\sin(\omega t + \alpha)}.$$

Заметим, что

$$\cos\omega t\sin(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\omega t\cos\alpha + \cos^2\omega t\sin\alpha,$$

поэтому

$$\overline{\cos\omega t\sin(\omega t + \alpha)} = \frac{1}{2}\,\overline{\sin 2\omega t}\cos\alpha + \overline{\cos^2\omega t}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\overline{W}_{вн} = -\frac{fC\omega}{2}\sin\alpha$$

или

$$\overline{W}_{вн} = \frac{fC\omega}{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (12.8)$$

Теперь определим среднюю мощность силы трения. Так как $F_{тр} = -hv$, то

$$\overline{W}_{тр} = -\overline{hv^2}. \qquad (12.9)$$

Но

$$\overline{v^2} = \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \overline{C^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)} = \frac{C^2\omega^2}{2}.$$

Поэтому (12.9) дает:

$$\overline{W}_{тр} = -h\frac{C^2\omega^2}{2}.$$

Так как работа внешней силы идет на преодоление трения, то средние мощности внешней силы и силы трения должны быть равны по абсолютной величине:

$$|\overline{W}_{тр}| = |\overline{W}_{вн}|, \qquad (12.10)$$

т. е.

$$\frac{fC\omega}{2}\left|\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right| = h\frac{C^2\omega^2}{2}$$

или

$$f\left|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right|=hC\omega,$$

откуда

$$C=\frac{f}{h\omega}\left|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right|. \qquad (12.11)$$

Максимальная возможная амплитуда (явление резонанса) получается, как видно из (12.11), при $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=1$, т. е. при $\alpha=-\frac{\pi}{2}$. При этом $\omega=\omega_0$ и $C=\frac{f}{h\omega_0}$. Следовательно, решение в случае резонанса есть

$$x=\frac{f}{h\omega_0}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Мы опять получили формулу (12.7).

Вернемся к формуле (12.8). Из нее видно, что при резонансе $\overline{W}_{вн}$ имеет наибольшее значение, так как при резонансе $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=1$. Поэтому в случае резонанса внешняя сила развивает наибольшую среднюю мощность и, следовательно, производит наибольшую работу.

Приведенные энергетические соображения позволяют определить амплитуду при резонансе и в случае более сложной зависимости силы трения от скорости. Пусть сила трения дана формулой

$$F_{тр}=-hv\,|v|^{n-1}. \qquad (12.12)$$

При $v>0$ (12.12) дает $F_{тр}=-hv^n$, при $v<0$ получим $F_{тр}=h\,|v|^n$. Поэтому (12.12) при любом знаке скорости v дает силу трения, направленную противоположно скорости. Средняя мощность внешней силы по-прежнему дается формулой (12.8). Определим $\overline{W}_{тр}$. Мгновенное значение $W_{тр}=F_{тр}v=-hv^2\,|v|^{n-1}$; так как $v^2=|v|^2$, то $W_{тр}=-h\,|v|^{n+1}$; подставляя сюда значение v, находим:

$$W_{тр}=-hC^{n+1}\omega_0^{n+1}\,|\sin(\omega_0 t+\alpha)|^{n+1}. \qquad (12.13)$$

Пользуясь (12.13), получаем:

$$\overline{W}_{тр}=-hC^{n+1}\omega_0^{n+1}A,$$

где положено $A=\overline{|\sin(\omega_0 t+\alpha)|^{n+1}}$ *). Условие (12.10) дает:

$$hC^{n+1}\omega_0^{n+1}A=\frac{1}{2}fC\omega_0\left|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Отсюда

$$C=\sqrt[n]{\frac{f}{2hA\omega_0^n}\left|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right|}.$$

Максимальная амплитуда, достигаемая при резонансе, равна

$$C=\frac{1}{\omega_0}\sqrt[n]{\frac{f}{2hA}}. \qquad (12.14)$$

Частным случаем формулы (12.14) при $n=1$ (сила трения пропорциональна скорости) является найденная раньше формула

$$C=\frac{f}{\omega_0 h}.$$

§ 13. Реактивное движение и формула К. Э. Циолковского

При движении в безвоздушном пространстве единственный способ управления полетом (изменения скорости и направления) заключается в отбрасывании части массы самого летящего тела, т. е. в применении реактивного принципа движения.

Русский ученый К. Э. Циолковский первый полностью осознал значение реактивного принципа и исследовал основные закономерности реактивного движения. От него, через его учеников и последователей, советских ученых и конструкторов, идет та научная традиция, воплощением которой явились советские искусственные спутники Земли, искусственные планеты и космические корабли с космонавтами на борту.

Выведем основное уравнение прямолинейного движения ракеты. Топливо ракеты — будь то порох или смесь горючего

*) Приведем для справки значения A для нескольких n: $n\to 0$, $A\to\frac{2}{\pi}=0{,}64$; $n=1$, $A=0{,}5$; $n=2$, $A=\frac{4}{3\pi}=0{,}42$; $n=3$, $A=\frac{3}{8}=0{,}375$.

(спирта, бензина) и окислителя (кислорода, азотной кислоты) — обладает определенным запасом Q химической энергии на единицу массы (Q порядка 1000 *ккал/кг* для бездымного пороха и 2500 *ккал/кг* для бензина с кислородом*)). При сгорании эта химическая энергия превращается в тепловую энергию продуктов горения. Затем продукты горения вытекают через сопло; при этом тепловая энергия их превращается в кинетическую энергию движения.

Когда реактивный двигатель закреплен на испытательном стенде, продукты горения вытекают с определенной скоростью u_0. При этом кинетическая энергия их на единицу массы составляет определенную долю химической энергии топлива

$$\frac{u_0^2}{2} = \alpha Q, \tag{13.1}$$

где α — безразмерное число — коэффициент полезного действия процессов горения и истечения газов**). В дальнейшем будем считать скорость истечения u_0 известной, заданной величиной. Она составляет около 2 *км/сек* для пороха и около 3 *км/сек* для жидкого топлива. Легко убедиться, что этим величинам соответствуют значения $\alpha \approx 0{,}5$ (к. п. д. порядка 50%).

До горения топливо покоилось. Пусть сгорела и вытекла из сопла масса dm топлива. При этом она приобрела количество движения $u_0 dm$. Очевидно, что импульс силы dI, с которой ракета действует на эту массу, равен количеству движения, приобретенному массой dm***),

$$dI = F\,dt = u_0 dm.$$

По закону равенства действия и противодействия импульс силы, с которой масса dm продуктов горения действует на

*) Теплотворная способность бензина около 10 000 *ккал/кг*, однако для сжигания 1 *кг* бензина (CH_2) нужно израсходовать еще 3,4 *кг* кислорода. В ракете, летящей в безвоздушном пространстве, кислород надо везти с собой и энергию надо относить к сумме веса топлива и окислителя.

**) В формуле (13.1) нужно Q выразить в механических единицах (*эрг/г*), тогда u_0 получится в *см/сек*. При этом 1 *ккал/кг* = 1 *кал/г* = $= 4{,}18 \cdot 10^7$ *эрг/г*.

***) Обозначение dI связано с тем, что рассматривается малая масса dm.

ракету, равен той же величине с обратным знаком. Пусть, например, скорость истечения u_0 направлена в сторону убывания x. Тогда u_0 отрицательно, $u_0 = -|u_0|$. Для импульса силы, действующей на ракету, имеем:

$$dI_p = F_p dt = -u_0 dm = |u_0|\, dm. \qquad (13.2)$$

Величина

$$I' = \frac{dI}{dm} = |u_0| \qquad (13.3)$$

есть импульс силы, приходящейся на единицу массы, так называемый единичный импульс. Эта величина равна скорости истечения газов из покоящейся ракеты.

Проверим размерность в формуле (13.3). Сила F имеет размерность $г \cdot см/сек^2$ (дина), импульс силы I — это произведение силы на время, поэтому его размерность $г \cdot см/сек$. Размерность $\frac{dI}{dm}$ есть $г \cdot см/сек \cdot г = см/сек$ — это размерность скорости. Для пороховых газов $u_0 = 2 \cdot 10^5 = 2$ $км/сек$, для жидкого топлива $u_0 = 3$ $км/сек$. В технической системе единиц единичный импульс выражается в $кГ \cdot сек/кг$, где $кГ$ обозначает силу, а $кг$ — массу. Сила в 1 $кГ$ равна силе, выраженной в динах, деленной на 1000 g, где g — ускорение силы тяжести; масса в 1 $кг$ равна массе, выраженной в граммах, деленной на 1000. Поэтому I', выраженный в $кГ \cdot сек/кг$, численно равен $\frac{u_0 \cdot 1000}{1000g} = \frac{u_0}{g}$. Считая округленно $g \approx \approx 1000$ $см/сек^2$, получим 200 $кГ \cdot сек/кг$ для пороховых газов и 300 $кГ \cdot сек/кг$ для жидкого топлива.

Сила, действующая на ракету, по формуле (13.2) есть

$$F_p = |u_0| \frac{dm}{dt}.$$

Она пропорциональна количеству газов, вытекающему в единицу времени.

Обратимся теперь к выводу формулы для скорости движения ракеты. Если ракета сама движется с какой-то скоростью u, то скорость истечения газов отлична от u_0 и равна $u + u_0 = u - |u_0|$ (напомним, что в покоящейся ракете скорость истечения газов равнялась $-|u_0|$). Очевидно, что такие величины, как *разность* скоростей пороха до горения и вытекших пороховых газов и *сила*, с которой на ракету

действуют пороховые газы, не зависят от того, движется или покоится ракета.

Обозначим начальную массу ракеты вместе с порохом M_0. Массу вытекших пороховых газов обозначим m. Величина m есть функция времени, $m = m(t)$. Обозначение m находится в соответствии с тем, что малую вытекшую массу мы обозначали dm, количество пороховых газов, вытекающее в единицу времени, $\frac{dm}{dt}$. Масса ракеты с порохом в момент t равна

$$M = M(t) = M_0 - m(t). \tag{13.4}$$

Уравнение движения (второй закон Ньютона)

$$M\frac{du}{dt} = F = |u_0|\frac{dm}{dt}.$$

Это уравнение можно записать так:

$$M\,du = |u_0|\,dm$$

или, пользуясь (13.4)

$$(M_0 - m)\frac{du}{dm} = |u_0|. \tag{13.5}$$

Возможность сократить dt физически означает, что (при отсутствии других сил, действующих на ракету) скорость ракеты зависит только от количества вытекших пороховых газов (при фиксированной величине u_0). К моменту, когда из сопла вытекло данное количество пороховых газов m, ракета приобретает определенную скорость u, независимо от того, за какое время произошло вытекание данного количества пороховых газов.

Нетрудно решить уравнение (13.5). В начальный момент, при $m = 0$, $u = 0$. Поэтому получаем:

$$u = |u_0|\int_0^m \frac{dm}{M_0 - m} = -|u_0|\ln(M_0 - m)\Big|_0^m =$$
$$= |u_0|[-\ln(M_0 - m) + \ln M_0] = |u_0|\ln\frac{M_0}{M_0 - m} =$$
$$= |u_0|\ln\frac{M_0}{M}.$$

Итак,

$$u = |u_0| \ln \frac{M_0}{M}. \qquad (13.6)$$

Эта формула впервые была получена К. Э. Циолковским и носит его имя.

Если нас интересует конечная скорость $u_к$ к моменту окончания горения всего топлива, то надо в формулу (13.6) подставить вместо M величину $M_к$ — конечную массу ракеты после сгорания всего топлива: $M_к = M_0 - m_п$, где $m_п$ — полная масса всего топлива. Получим:

$$u_к = |u_0| \ln \frac{M_0}{M_к}. \qquad (13.7)$$

При помощи этой формулы легко решается и обратная задача: какой нужно взять начальную массу ракеты для того, чтобы данной конечной массе $M_к$ придать определенную скорость $u_к$

$$\ln \frac{M_0}{M_к} = \frac{u_к}{|u_0|},$$

откуда

$$M_0 = M_к e^{\frac{u_к}{|u_0|}}. \qquad (13.8)$$

Для того чтобы тело вращалось вокруг Земли в виде спутника, нужно, чтобы его центробежная сила уравновешивала силу притяжения Земли. Соответствующая скорость u_1 называется первой космической скоростью. Для ее определения получаем:

$$M_к \frac{u_1^2}{R} = M_к g, \qquad (13.9)$$

где R — радиус орбиты. Он приблизительно равен радиусу Земли, поэтому в правой части (13.9) в качестве силы притяжения взята сила тяжести на поверхности Земли. Из формулы (13.9) находим:

$$u_1 = \sqrt{gR} \approx \sqrt{gr_0} \approx 8 \textit{ км/сек}.$$

Для спутника, летящего на расстоянии r от центра Земли, значительно отличающемся от r_0, надо учесть, что с изменением высоты меняется величина ускорения силы тяжести,

равная g на поверхности Земли. Действительно, по закону тяготения Ньютона тело, отстоящее на расстоянии r от центра Земли, притягивается к Земле с силой $F=\varkappa\frac{mM}{r^2}$, где m — масса тела, M — масса Земли. С другой стороны, по второму закону Ньютона $F=ma$, где a — ускорение силы тяжести на расстоянии r от центра Земли. Сравнивая два выражения для F, находим $a=\frac{\varkappa M}{r^2}$. Если $r=r_0$, то $a=g$, поэтому $g=\frac{\varkappa M}{r_0^2}$, откуда $\varkappa=\frac{gr_0^2}{M}$. Окончательно получаем $a=g\frac{r_0^2}{r^2}$. В этом случае равенство центробежной силы и силы тяжести дает:

$$M_к\frac{u^2}{r}=M_к g\frac{r_0^2}{r^2},$$

откуда скорость спутника на орбите

$$u=\sqrt{\frac{gr_0^2}{r}}.$$

Чем больше расстояние r, тем меньше скорость u, необходимая для того, чтобы спутник вращался на соответствующей орбите. Однако это вовсе не означает, что легче запустить спутник на орбиту с весьма большим r, чем на орбиту с r, близким к r_0: ведь для вывода спутника на орбиту с большим r надо затратить бо́льшую энергию на преодоление силы тяжести на пути от земной поверхности до орбиты.

Рассмотрим теперь следующую по трудности осуществления задачу. Для того чтобы тело могло уйти из области действия земного притяжения, нужно, чтобы его начальная кинетическая энергия была больше разности потенциальной энергии удаленного тела и тела на поверхности Земли. Эту величину мы нашли в § 2 [формула (2.5)]. При этом предполагается, что сгорание топлива и приобретение скорости происходят быстро на участке пути, малом по сравнению с радиусом Земли, так что изменением потенциальной энергии на этом участке пути можно пренебречь. Это значит, что во время горения топлива реактивная сила весьма велика, и действием силы тяжести в это время также можно пренебречь. Доказано, что быстро сжигать топливо выгоднее

(меньше потребуется топлива), нежели растягивать процесс горения на время, необходимое для прохождения пути порядка радиуса Земли *).

Начальная скорость, которую должно иметь тело для того, чтобы уйти из области земного притяжения, называется второй космической скоростью. Найдем ее. По формуле (2.5) начальная энергия, необходимая для достижения расстояния r от центра Земли телом, первоначально находившимся на поверхности (r_0), равна $K_0 = mg\frac{r_0}{r}(r - r_0)$. В нашем случае r значительно больше r_0, поэтому $r - r_0 \approx r$, что дает $K_0 = mgr_0$. Приравняем этой величине кинетическую энергию ракеты

$$M_к \frac{u_2^2}{2} = M_к g r_0;$$

отсюда

$$u_2 = \sqrt{2gr_0} \approx 11,2 \ км/сек.$$

Наконец, начальная скорость, которой должно обладать тело для того, чтобы уйти из поля тяготения Солнца, т. е. за пределы солнечной планетной системы, называется третьей космической скоростью u_3. Найдем ее, пользуясь тем, что скорость v_1 вращения Земли вокруг Солнца известна, а именно, $v_1 = 30$ *км/сек*.

По закону тяготения Ньютона сила притяжения тела массы m к Солнцу есть $F = -k\frac{M_\odot m}{r^2}$, где $M_\odot$ — масса Солнца **), r — расстояние от центра Солнца до тела, k — постоянный коэффициент. Потенциальная энергия тела, удаленного на расстояние r от центра Солнца, равна

$$u(r) = -\frac{kM_\odot}{r} m. \tag{13.10}$$

При этом за нуль принято значение потенциальной энергии на бесконечности (см. § 2).

*) Лишь на том участке пути, где еще велики плотность атмосферы и сопротивление воздуха, невыгодно двигаться с большой скоростью. Однако толщина атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли (см. главу VII), и мы ее учитывать не будем.

**) Значком $\odot$ астрономы обозначают Солнце. Численно $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ *г*.

Величину потенциальной энергии тела, находящегося на радиусе земной орбиты, легко выразить через скорость движения Земли по орбите. В самом деле, на орбите Земли сила притяжения Земли к Солнцу уравновешивается центробежной силой

$$M\frac{v_1^2}{r_1} = k\,\frac{M_\odot M}{r_1^2},$$

где v_1 — скорость вращения Земли вокруг Солнца, а r_1 — радиус земной орбиты 150 млн. $км = 1{,}5\cdot 10^{13}$ $см$. Отсюда

$$kM_\odot = v_1^2 r_1,$$

и формула (13.10) принимает вид

$$u(r_1) = -v_1^2 m.$$

Для того чтобы тело, находившееся на расстоянии r_1 от Солнца, ушло из поля тяготения Солнца, нужно, чтобы на этом расстоянии сумма его кинетической и потенциальной энергии была неотрицательна. Это приводит к условию

$$M_k\frac{v_2^2}{2} + u(r_1) = M_k\frac{v_2^2}{2} - M_k v_1^2 \geqslant 0.$$

Здесь v_2 — искомая скорость, необходимая для ухода из солнечной системы, v_1 — известная скорость движения Земли.

С таким положением мы уже встречались при рассмотрении движения тела в поле тяготения Земли: скорости, необходимой для ухода тела из поля земного тяготения, соответствует кинетическая энергия, вдвое большая, чем кинетическая энергия, соответствующая скорости, необходимой для вращения тела в виде спутника.

Из последнего соотношения находим минимальную необходимую скорость

$$v_2 = v_1\sqrt{2} \approx 42\ км/сек.$$

Итак, для того чтобы уйти из солнечной системы, необходимо на орбите Земли иметь начальную скорость (относительно Солнца) 42 *км/сек*. При этом оказывается, что тело со скоростью больше 42 *км/сек* уйдет из солнечной системы *независимо* от того, куда направлена эта скорость — прямо по радиусу от Солнца [*1*] или по касательной к орбите Земли

[*2*], [*3*], или даже в сторону Солнца [*4*] (но все же под некоторым углом, чтобы не попасть на поверхность Солнца). От направления начальной скорости зависит только форма траектории (рис. 154), цифры в скобках соответствуют номерам траекторий на рис. 154.

Ясно, что для запуска ракеты с Земли наиболее выгодна траектория [*2*]: сама Земля движется со скоростью 30 *км/сек*, поэтому для получения скорости 42 *км/сек* в этом же направлении достаточно, чтобы относительно Земли ракета двигалась со скоростью $v_2' = 12$ *км/сек*. Эту скорость v_2' ракета должна иметь после того, как она выйдет из поля тяготения Земли, т. е. удалится от Земли на расстояние, большое по сравнению с радиусом Земли, но малое по сравнению с радиусом земной орбиты.

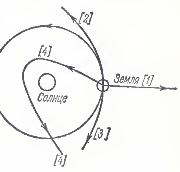


Рис. 154.

Какую же для этого надо иметь начальную скорость на поверхности Земли? Именно эта скорость и называется третьей космической скоростью u_3. Определим ее из соотношения

$$M_к \frac{u_3^2}{2} = M_к g r_0 + M_к \frac{v_2'^2}{2}. \qquad (13.11)$$

Здесь первый член справа есть энергия, необходимая для преодоления притяжения Земли, второй член — это энергия, которая должна остаться после этого, чтобы ракета имела (в сумме со скоростью движения Земли) скорость v_2, необходимую для ухода из солнечной системы. Формула (13.11) дает:

$$u_3^2 = 2gr_0 + v_2'^2 = u_2^2 + v_2'^2,$$

откуда

$$u_3 = \sqrt{u_2'^2 + v_2'^2} = \sqrt{11{,}2^2 + 12^2} \approx 16{,}4 \text{ км/сек}.$$

Заметим, что для того, чтобы приблизиться к Солнцу или попасть, например, на Меркурий или Венеру, второй

космической скорости недостаточно. Действительно, при наличии этой скорости ракета отделится от Земли и будет двигаться по орбите со скоростью, равной скорости Земли, т. е. 30 *км/сек*.

Хотя потенциальная энергия и уменьшается при приближении к Солнцу, но ракета не может приблизиться к Солнцу, так как этому мешает центробежная сила ее движения по орбите. Для того чтобы проникнуть в глубь солнечной системы, необходимо уменьшить скорость ракеты относительно Солнца, а это так же трудно, как и увеличить ее. В частности, для попадания в Солнце нужно ракету остановить, т. е. нужно, чтобы она имела скорость 30 *км/сек* относительно Земли (после выхода из поля тяжести). Для этого нужна на поверхности Земли начальная скорость

$$u_4 = \sqrt{30^2 + 11{,}2^2} = 32 \ \text{км/сек}.$$

Попасть в Солнце труднее, чем уйти от него! Более выгодные варианты можно получить, используя изменение скорости ракеты под влиянием других планет. На этом вопросе мы останавливаться не будем.

Найдем величины отношения $\frac{M_0}{M_к}$, при которых достигаются скорости u_1, u_2, u_3. Для пороха $|u_0| = 2$ *км/сек*. Пользуясь формулой (13.8), получаем: для $u_1 = 8$ *км/сек* $\frac{M_0}{M_{к_1}} = e^4 = 54$; для $u_2 = 11{,}2$ *км/сек* $\frac{M_0}{M_{к_2}} = e^{5,6} = 270$; для $u_3 = 16{,}4$ *км/сек* $\frac{M_0}{M_{к_3}} = e^{8,2} = 3641$. В случае жидкого топлива $|u_0| = 3$ *км/сек*. Аналогичные подсчеты дают: $\frac{M_0}{M_{к_1}} = 14{,}5$, $\frac{M_0}{M_{к_2}} = 42$, $\frac{M_0}{M_{к_3}} = 245$. Из подсчетов видно, что величина $\frac{M_0}{M_к}$ сильно зависит от скорости истечения газов (u_0). Для того чтобы оценить трудности задачи по запуску ракеты, следует иметь в виду, что $M_к$ включает в себя вес баков для топлива и т. п.

Найдем к.п.д. ракеты как целого. Определим эту величину как отношение кинетической энергии ракеты после сгорания топлива $M_к \frac{u_к^2}{2}$ к химической энергии сгоревшего топлива

$mQ=(M_0-M_к)\,Q$. Коэффициент полезного действия

$$\eta=\frac{M_к u_к^2}{2Q\,(M_0-M_к)}. \qquad (13.12)$$

Подставив в (13.12) выражение для $u_к$ из (13.7) и выразив u_0^2 из (13.1), окончательно получим:

$$\eta=\alpha\frac{M_к}{M_0-M_к}\left(\ln\frac{M_0}{M_к}\right)^2.$$

К.п.д. оказывается произведением «внутреннего к.п.д.» α, характеризующего полноту сгорания топлива и преобразования тепловой энергии в кинетическую энергию газов, и второго множителя, зависящего только от выбора соотношения между массой горючего m и массой полезного груза $M_к$. Обозначим $\frac{m}{M_к}=z$. Тогда $M_0=M_к+m=M_к\,(1+z)$ и к. п. д.

$$\eta=\alpha\frac{M_к}{m}\left(\ln\frac{M_к+m}{M_к}\right)^2=\alpha\frac{1}{z}\,[\ln(1+z)]^2.$$

На первый взгляд может показаться, что к. п. д. очень велик при малых z за счет дроби $\frac{1}{z}$. В действительности при малых z имеет место $\ln(1+z)\approx z$, поэтому

$$\eta\approx\alpha\frac{1}{z}z^2=\alpha z.$$

К. п. д. пропорционален z и, следовательно, он мал при малом z. При малом z ракета движется медленно, почти всю энергию уносят газы. При очень больших z к.п.д. снова падает из-за уменьшения полезной массы*). Так как окончательная скорость ракеты также зависит только от z, то можно сказать, что к.п.д. ракеты определяется требуемой скоростью. При малой скорости к.п.д. ракеты мал, поэтому невыгодно применение ракет в автомобилях и в других случаях сравнительно медленного движения. При большой

*) При большом z величина $[\ln(1+z)]^2$ растет медленнее, чем z. Действительно, обозначая $y=\ln(1+z)$, получим $z=e^y-1$, а функция e^y растет быстрее любой степени y (см. гл. II).

скорости энергетический к.п.д. ракеты снова уменьшается, но применение ракет тем не менее оправдано, так как мы не располагаем другими способами ускорения тел до больших скоростей.

Упражнения

1. Найти значение z, дающее максимум коэффициенту полезного действия η. Найти величину этого максимума.

2. Найти радиус орбиты, на которой время обращения спутника равно 24 часам. Спутник, запущенный на такую орбиту в плоскости экватора, висит над одной точкой земной поверхности.

§ 14. Траектория снаряда

Рассмотрим задачу о полете снаряда, выброшенного из орудия с начальной скоростью v_0. Примем точку вылета снаряда из ствола за начало координат, ось y направим вертикально вверх. Для простоты силу сопротивления воздуха не будем принимать во внимание, учет этой силы значительно усложняет задачу.

По второму закону Ньютона

$$m\frac{dv}{dt}=F.$$

Этот закон мы применяли раньше только для прямолинейного движения. Однако в задаче о траектории направление v меняется с течением времени (скорость всегда направлена по касательной к траектории полета снаряда). Поэтому поступим следующим образом. Силу F разложим на составляющие в направлении оси x и в направлении оси y. Эти составляющие обозначим соответственно через F_x и F_y. То же самое проделаем со скоростью v.

Всякое движение в плоскости x, y можно рассматривать как результат сложения двух движений: одного, происходящего вдоль оси x под действием силы F_x со скоростью v_x, и другого вдоль оси y под действием силы F_y со скоростью v_y. Применив к каждому из этих движений в отдельности второй закон Ньютона, получим:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= F_x,\\ m\frac{dv_y}{dt} &= F_y. \end{aligned}\right\} \qquad (14.1)$$

Мы получили два уравнения (14.1), однако в каждом из этих уравнений сила и скорость направлены вдоль одной прямой (вдоль оси x в первом уравнении и вдоль оси y во втором).

Обозначим через φ угол ствола орудия с горизонтальным направлением; φ называют углом бросания. Так как мы рассматриваем простейший случай, когда в процессе полета на снаряд действует только сила тяжести, направленная к земле, то $F_x = 0$, $F_y = -mg$. Поэтому уравнения (14.1) в этом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= 0, \\ m\frac{dv_y}{dt} &= -mg. \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

Поставим начальные условия для функций $v_x(t)$ и $v_y(t)$. В момент вылета снаряда из орудия $t = 0$

$$v_x(0) = v_0 \cos\varphi,$$
$$v_y(0) = v_0 \sin\varphi.$$

Первое из уравнений (14.2) дает $\frac{dv_x}{dt} = 0$, откуда следует, что v_x постоянна, а поэтому

$$v_x(t) = v_x(0) = v_0 \cos\varphi. \tag{14.3}$$

Второе уравнение (14.2) дает $\frac{dv_y}{dt} = -g$, откуда, интегрируя от 0 до t, находим:

$$v_y(t) - v_y(0) = -gt$$

или

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\varphi. \tag{14.4}$$

Для определения перемещений x и y вдоль координатных осей воспользуемся очевидными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x, \\ \frac{dy}{dt} &= v_y. \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

Пользуясь формулами (14.3) и (14.4), получаем из (14.5)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos\varphi, \\ \frac{dy}{dt} &= -gt + v_0 \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (14.6)$$

В начальный момент времени снаряд был в начале координат, поэтому

$$\text{при } t=0 \qquad x=0, \quad y=0. \qquad (14.7)$$

Интегрируя уравнения (14.6) от 0 до t и пользуясь начальными условиями (14.7), находим:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\varphi, \\ y &= v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.8)$$

Формулы (14.8) дают возможность определить положение снаряда в любой момент времени t.

Беря различные значения t, можем найти по формулам (14.8) положение снаряда в различные моменты времени и построить график полета снаряда (траекторию снаряда). Таким образом, уравнения (14.8) дают кривую на плоскости x, y. Задание кривой при помощи двух уравнений

$$x = f_1(t),$$
$$y = f_2(t)$$

называется параметрическим заданием кривой. Число t называется параметром.

Из уравнений (14.8) нетрудно исключить t и получить уравнение траектории в обычном виде, в виде зависимости y от x. Действительно, первое уравнение (14.8) дает $t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi}$, после этого из второго уравнения (14.8) находим:

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi}. \qquad (14.9)$$

Из (14.9) видим, что y есть многочлен второй степени от x, график такого многочлена — парабола. Поэтому траектория снаряда (если не учитывать сопротивление воздуха) есть

парабола. На рис. 155 изображена траектория (14.9) для случая $v_0 = 80$ *м/сек* *), $\varphi = 45°$.

Из (14.9) видно, что при одном и том же v_0 форма траектории зависит от угла бросания φ. Найдем наибольшую высоту подъема снаряда и дальность стрельбы при данном

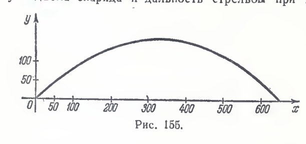


Рис. 155.

φ и v_0. Для определения наибольшей высоты подъема составим уравнение $\frac{dy}{dx} = 0$. Получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi - x \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{2g}.$$

При этом значении x высота y имеет максимум $\left(\text{физически ясно, что это именно максимум; впрочем, этот факт легко проверить по } \frac{d^2y}{dx^2}\right)$. Подставляя найденное x в (14.9), получаем:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}.$$

Для определения дальности полета достаточно определить то значение x, при котором $y = 0$ (см. рис. 155),

$$x \operatorname{tg} \varphi - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} = 0.$$

*) При иебольшой иачальиой скорости роль сопротивления воздуха действительио иевелика. Одиако если взять иачальную скорость $v_0 = 800$ *м/сек*, то для снаряда калибром (диаметром) 305 *мм* при угле бросаиня $\varphi = 55°$ сопротивление воздуха умеиьшает дальность с 61 до 22,2 *км*.

Отбрасывая не интересующее нас решение $x=0$, находим:

$$x_{max}=\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}. \qquad (14.10)$$

Дальность стрельбы зависит от начальной скорости и от угла бросания.

При каком же угле бросания (начальная скорость v_0 не меняется) дальность стрельбы наибольшая? Ясно, что это будет тогда, когда $\sin 2\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = 45°$.

Определим время, в течение которого снаряд поднимается вверх. Для этого достаточно решить уравнение $\frac{dy}{dt}=0$, потому что в тот момент t, когда y достигает своего наибольшего значения, снаряд перестает подниматься и начинает падать. Условие $\frac{dy}{dt}=0$ дает $v_0 \sin\varphi - gt = 0$, откуда

$$t=\frac{v_0 \sin\varphi}{g}. \qquad (14.11)$$

Полное время полета $t_п$ определим, исходя из того, что полет прекращается в тот момент, когда $x = x_{max}$. Пользуясь (14.8) и (14.10), находим:

$$v_0 t_п \cos\varphi = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g},$$

откуда

$$t_п=\frac{2v_0 \sin\varphi}{g}. \qquad (14.12)$$

Сравнивая (14.12) и (14.11), видим, что полное полетное время $t_п$ в 2 раза больше времени подъема. Время подъема снаряда равно времени его падения.

Отметим в заключение, что реальные траектории снарядов не являются в точности параболами, они несколько искажены, так как в действительности снаряд испытывает сопротивление воздуха. При этом дальность стрельбы, высота подъема снаряда, полетное время и т. п. зависят от веса снаряда, его формы и плотности воздуха.

Упражнения

1. Снаряд вылетает из орудия со скоростью 80 *м/сек*. Определить дальность стрельбы и максимальную высоту подъема снаряда, если угол бросания $\varphi = 30°$; $45°$; $60°$.

2. Определить наибольшую высоту, на которой снаряд с начальной скоростью $v_0 = 80$ *м/сек* может поразить цель, расположенную на расстоянии 500 *м* от местонахождения орудия.

§ 15. Масса, центр тяжести и момент инерции стержня

Рассмотрим тонкий стержень. Направим ось x вдоль стержня, обозначим ρ массу, приходящуюся на единицу длины стержня. Таким образом, на отрезке dx между x и $x + dx$ расположена масса

$$dm = \rho dx.$$

Стержень может быть сделан из материала, плотность которого зависит от x, или может иметь переменное по длине, т. е. зависящее от x, сечение. Поэтому ρ является функцией координаты x. Величина ρ есть произведение объемной плотности материала d ($г/см^3$) и сечения стержня S ($см^2$):

$$\rho\,(г/см) = Sd.$$

Величину ρ следует назвать плотностью на единицу длины. Однако так как настоящая плотность d (объемная) нигде дальше не входит, то сокращенно будем называть ρ плотностью, толщину стержня считаем малой и изображаем его просто линией — отрезком оси x. Масса стержня, очевидно, равна

$$m = \int_a^b \rho(x)\, dx, \qquad (15.1)$$

где a и b — координаты концов стержня.

Пусть стержень закреплен на оси x; ось x расположена горизонтально, ось y направлена вертикально вверх, сила тяжести действует на стержень, как показано стрелкой, стремясь опустить стержень (рис. 156).

Представим себе, что ось x — это коромысло весов. На рисунке схематически показана призма, на которую в начале координат опирается ось x. Таким образом, ось x может поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Найдем, какой груз μ, расположенный слева на расстоянии R, нужен для того, чтобы уравновесить находящийся справа стержень.

По законам рычага элемент массы dm, находящийся на расстоянии x справа от оси, уравновешивается элементом массы $d\mu$, находящейся слева, если массы относятся обратно пропорционально расстояниям, т. е. если

$$\frac{d\mu}{dm} = \frac{x}{R}$$

или

$$R d\mu = x dm. \qquad (15.2)$$

Элемент массы dm равен, как было выяснено раньше, $\rho\, dx$. Для того чтобы уравновесить весь стержень, нужна масса μ, удовлетворяющая равенству

$$R\mu = \int_a^b x\rho(x)\,dx. \qquad (15.3)$$

Это равенство получено интегрированием левой и правой частей (15.2). При этом на правой стороне оси различные элементы массы dm находятся на разном расстоянии x от

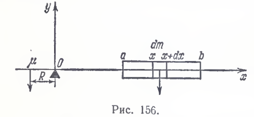


Рис. 156.

опоры, поэтому величина x вошла под знак интеграла. Слева на оси все элементы массы $d\mu$ (уравновешивающие различные элементы dm стержня) собраны на одном и том же расстоянии R от опоры. R есть постоянная величина и поэтому

$$\int R\,d\mu = R\int d\mu = R\mu.$$

Как видно из сравнения (15.3) и (15.1), интеграл, от которого зависит масса μ, уравновешивающая стержень, отличается от интеграла, выражающего массу стержня.

Поставим вопрос: если всю массу стержня сосредоточить в одной точке, то на каком расстоянии x_C должна быть эта

точка от опоры (от начала координат), чтобы уравновешивать ту же массу μ на расстоянии R, которую уравновешивает стержень (рис. 157). Найдем

$$R\mu = x_C m = \int_a^b x\rho\, dx, \tag{15.4}$$

откуда

$$x_C = \frac{1}{m}\int_a^b x\rho\, dx = \frac{\int_a^b x\rho\, dx}{\int_a^b \rho\, dx}. \tag{15.5}$$

Величина x_C есть координата центра тяжести или, как его иначе называют, центра массы стержня. Очень важно, что точка x_C есть действительно вполне определенная точка стержня: если весь стержень как целое переместить вдоль оси x, например вправо на расстояние l (рис. 158), то при этом и x_C увеличится на ту же величину l, так что точка с координатой $x = x_C$ для данного стержня всегда находится на вполне определенных расстояниях от концов стержня. Докажем это.

Рис. 157.

Рассмотрим стержень, смещенный на расстояние l вправо по сравнению с первоначальным положением (рис. 158, низ). Величины, относящиеся к новому (смещенному) положению, будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие величины, относящиеся к первоначальному положению, но с индексом 1. При этом

$$a_1 = a + l, \quad b_1 = b + l, \quad \rho_1(x) = \rho(x - l).$$

Следует особо обратить внимание на знак минус в последней формуле. Действительно, из рис. 158 видно, что каждому значению x в новом положении стержня (нижний рисунок) соответствует такая же величина плотности, как значению $x - l$ в первоначальном положении стержня (верхний рисунок).

По формуле (15.5)

$$x_C=\frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx},\qquad x_{C_1}=\frac{\int\limits_{a_1}^{b_1} x\rho_1(x)\,dx}{\int\limits_{a_1}^{b_1} \rho_1(x)\,dx}. \tag{15.6}$$

В интегралах, входящих в формулу для x_C, сделаем замену переменных по формуле $z=x-l$ или $x=z+l$, откуда

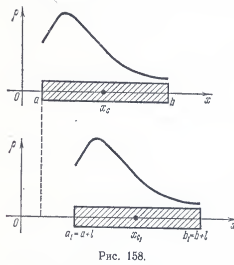


Рис. 158.

$dx=dz$. Тогда $\rho_1(x)=\rho(x-l)=\rho(z)$. При $x=a_1=a+l$ получим $z=a$; при $x=b_1=b+l$ получим $z=b$. Поэтому

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\rho_1(x)\,dx=\int\limits_a^b\rho(z)\,dz=m.$$

Это означает, что масса стержня не зависит от того, в каком положении находится стержень.

Обратимся к интегралу, стоящему в числителе,

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}x\rho_1(x)\,dx=\int\limits_a^b(z+l)\,\rho(z)\,dz=\int\limits_a^b z\rho(z)\,dz+l\int\limits_a^b\rho(z)\,dz.$$

Заметим, что из формулы (15.4)

$$\int_a^b z\rho(z)\,dz = \int_a^b x\rho(x)\,dx = x_C m.$$

Поэтому

$$\int_{a_1}^{b_1} x\rho_1(x)\,dx = x_C m + lm.$$

Теперь находим, пользуясь (15.6),

$$x_{C_1} = \frac{x_C m + lm}{m} = x_C + l.$$

Этот результат был очевиден заранее, однако проделанные формальные преобразования являются полезными упражнениями на замену переменных в определенном интеграле.

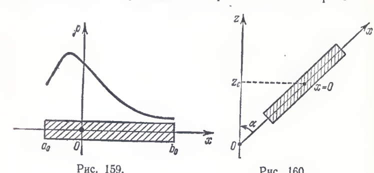


Рис. 159. Рис. 160.

Наиболее удобно выбирать систему координат с началом координат, помещенным в центре тяжести стержня (рис. 159). Величины в этой системе координат отметим индексом 0. Ясно, что

$$\int_{a_0}^{b_0} \rho_0(x)\,dx = m.$$

Координата центра тяжести x_{C_0} в такой системе координат равна нулю, поэтому

$$\int_{a_0}^{b_0} x\rho_0(x)\,dx = 0. \tag{15.7}$$

Покажем, что при любом положении стержня его потенциальная энергия в поле тяжести равна потенциальной энергии всей его массы, сосредоточенной в центре тяжести стержня. Рассмотрим положение стержня, показанное на рис. 160. Потенциальная энергия элемента стержня с массой dm равна $gz\,dm$, где z — высота, g — ускорение силы тяжести. Потенциальная энергия u всего стержня находится интегрированием. В качестве переменной интегрирования выберем длину, отсчитываемую вдоль стержня от его центра тяжести. В этом случае величину плотности в точке x обозначаем через $\rho_0(x)$. Выразим высоту z через x. Как видно из рис. 160, $z(x) = z_C + x\cos\alpha$, где z_C есть высота центра тяжести стержня. Получим

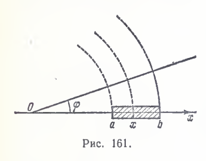


Рис. 161.

$$u = \int_{a_0}^{b_0} gz\rho_0(x)\,dx = g\int_{a_0}^{b_0}(z_C + x\cos\alpha)\,\rho_0(x)\,dx =$$
$$= gz_C\int_{a_0}^{b_0}\rho_0(x)\,dx + g\cos\alpha\int_{a_0}^{b_0}x\rho_0(x)\,dx = gz_Cm,$$

так как второй интеграл равен нулю по формуле (15.7). Итак, потенциальная энергия зависит только от массы стержня и высоты его центра тяжести.

Рассмотрим теперь так называемый момент инерции. Это понятие появляется при рассмотрении вращательного движения стержня. Пусть стержень вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей через начало координат. При таком вращении каждая точка стержня описывает окружность, радиус которой равен абсциссе данной точки x в начальном (горизонтальном) положении стержня (рис. 161). Обозначим ω угловую скорость вращения, выраженную в радианах в секунду. Это значит, что за время dt ось x поворачивается на угол $d\varphi = \omega\,dt$. Длина дуги, которую проходит произвольно выбранная точка с абсциссой x, равна

$$dl = x\,d\varphi = x\omega\,dt;$$

следовательно, линейная скорость движения каждой точки окружности равна

$$v(x) = \frac{dl}{dt} = \omega x.$$

Найдем кинетическую энергию вращательного движения всего стержня. Элемент массы dm, находящийся на расстоянии x от начала координат (в отрезке dx от x до $x + dx$), имеет кинетическую энергию

$$\frac{v^2}{2}\,dm = \frac{\omega^2 x^2}{2}\,dm = \frac{\omega^2 x^2}{2}\,\rho(x)\,dx.$$

Следовательно, кинетическая энергия всего стержня равна

$$E = \frac{\omega^2}{2}\int_a^b x^2 \rho(x)\,dx.$$

Интеграл в последней формуле носит название момента инерции стержня относительно оси, проходящей через начало, и обозначается I,

$$I = \int_a^b x^2 \rho(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$E = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращения выражается через момент инерции и угловую скорость совершенно так же, как кинетическая энергия поступательного движения выражается через массу и линейную скорость,

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Обратимся к вычислению I. Для стержня, центр тяжести которого находится в начале координат, момент инерции принимает значение I_0,

$$I_0 = \int_{a_0}^{b_0} x^2 \rho_0(x)\,dx. \qquad (15.8)$$

Заметим, что величина I_0 положительная, так как положительна подынтегральная функция в (15.8).

Определим момент инерции стержня для случая, когда его центр тяжести находится на расстоянии l справа от начала координат, так что $x_{C_1} = l$. В этом случае

$$a = a_0 + l, \ b = b_0 + l, \ \rho(x) = \rho_0(x - l), \qquad I = \int_a^b x^2 \rho(x)\, dx.$$

Положим $z = x - l$, тогда $x = z + l$, $dx = dz$. При изменении x от a до b величина z изменяется от a_0 до b_0. Поэтому

$$I = \int_{a_0}^{b_0} (z + l)^2 \rho_0(z)\, dz =$$

$$= l^2 \int_{a_0}^{b_0} \rho_0(z)\, dz + 2l \int_{a_0}^{b_0} z\rho_0(z)\, dz + \int_{a_0}^{b_0} z^2 \rho_0(z)\, dz. \qquad (15.9)$$

Заметим, что $\int_{a_0}^{b_0} \rho_0(z)\, dz = m$, а второй интеграл справа в (15.9) равен нулю по формуле (15.7), наконец, третий интеграл есть I_0 согласно (15.8). Таким образом, формула (15.9) принимает вид

$$I = ml^2 + I_0. \qquad (15.10)$$

Величина ml^2 есть, очевидно, момент инерции точечной массы, находящейся на расстоянии l от оси вращения (от начала координат). Таким образом, момент инерции стержня относительно вращения вокруг произвольной оси, перпендикулярной к стержню, равен сумме момента инерции стержня относительно вращения вокруг центра тяжести и момента инерции массы, равной массе стержня, находящейся на расстоянии от оси, равном расстоянию центра тяжести стержня от оси.

Наглядно можно представить себе стержень, закрепленный в центре тяжести на шарнире. Тогда вращение оси может не сопровождаться вращением самого стержня, возможно движение, последовательные стадии которого показаны на рис. 162. Кинетическая энергия такого движения равна $E' = 1/2\, mv_{C_1}^2$, где v_{C_1} — скорость центра тяжести стержня. Но $v_{C_1} = \omega l$, так что $E' = \frac{\omega^2}{2} ml^2$.

Движение, которое мы рассматривали раньше (рис. 161), отличается от рис. 162 тем, что там сам стержень также

вращается с угловой скоростью ω вокруг своего центра тяжести. Поэтому кинетическая энергия вращения рис. 161 оказывается равной сумме энергии вращения по типу рис. 162 и энергии вращения вокруг центра тяжести, равной $I_0 \frac{\omega^2}{2}$.

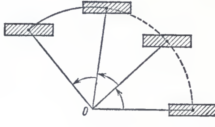


Рис. 162.

Из вывода формулы видно, что такое простое сложение энергий при сложении двух движений получается только тогда, когда рассматривается движение центра тяжести; только в этом случае получается равенство нулю интеграла (15.7).

Упражнения

1. Найти момент инерции относительно центра тяжести стержня длины l с равномерно распределенной массой.

2. Стержень составлен из двух кусков: первый кусок длины l_1 имеет постоянную плотность ρ_1, второй кусок длины l_2 имеет также постоянную, но другую плотность ρ_2. Найти положение центра тяжести стержня.

3. Найти положение центра тяжести и величину момента инерции относительно центра тяжести для стержня, имеющего форму тонкого треугольника длины L. Выразить их через длину L и массу стержня m.

Указание. Если направить ось x по медиане, а начало координат выбрать в вершине треугольника, то $\rho(x) = ax$, где a — постоянная.

§ 16. Колебания подвешенного стержня

Рассмотрим стержень, подвешенный в точке A (рис. 163). Пусть центр тяжести находится ниже точки подвеса, причем расстояние между точкой подвеса и центром тяжести равно l. Такой стержень представляет собой маятник. Определим период его колебаний.

Если маятник отклонен от положения равновесия на малый угол φ, то его потенциальная энергия равна

$$u = -mgl\cos\varphi.$$

Разложим $\cos\varphi$ в ряд и ввиду малости φ ограничимся первыми двумя членами: $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Поэтому

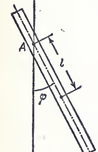


Рис. 163.

$$u = -mgl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = -mgl + mgl\frac{\varphi^2}{2}.$$

Таким образом, увеличение потенциальной энергии при отклонении маятника на угол φ от положения равновесия ($\varphi = 0$) есть $\Delta u = mgl\frac{\varphi^2}{2}$.

Кинетическая энергия вращения стержня вокруг оси равна

$$E = I\frac{\omega^2}{2} = I\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Согласно формуле (15.10) $I = ml^2 + I_0$, поэтому

$$E = \frac{1}{2}(ml^2 + I_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

где I_0 — момент инерции маятника относительно центра тяжести.

Предположим, что стержень совершает гармонические колебания, т. е. $\varphi = a\cos\omega t$. По закону сохранения энергии $\Delta u_{max} = E_{max}$. Так как $\frac{d\varphi}{dt} = -a\omega\sin\omega t$, то

$$E_{max} = \frac{1}{2}(ml^2 + I_0)a^2\omega^2, \quad \Delta u_{max} = mgl\frac{a^2}{2},$$

откуда

$$mgl\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(ml^2 + I_0)a^2\omega^2,$$

что дает

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2 + I_0}},$$

период колебаний

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

В частности, если вся масса стержня сосредоточена в его центре тяжести, то $I_0=0$. В этом случае мы получаем обычные формулы для частоты и периода колебаний так называемого математического маятника

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Из полученных формул следует, что чем больше I_0, тем меньше частота колебаний, соответственно тем больше период.

В случае, если $I_0\neq 0$, имеется определенное положение точки подвеса, при котором частота колебаний максимальна. Так как положение точки подвеса характеризуется величиной l, то для отыскания интересующего нас положения решим уравнение $\frac{d\omega}{dl}=0$. Это дает

$$mg(ml^2+I_0)-mgl\cdot 2ml=0,$$

откуда получаем:

$$l_{\max}=\sqrt{\frac{I_0}{m}}.$$

Для стержня длины L с равномерно распределенной массой $I_0=\frac{mL^2}{12}$ (см. упражнения к § 15), поэтому $l_{\max}=\frac{L}{\sqrt{12}}\approx$ $\approx 0{,}3L$.

Упраж иеиия

1. Маятинк имеет вид тоикой треугольиой полоскн из листового матернала (жесть, картои) (рнс. 164). Определить период колебаний, еслн маятиик подвешеи: а) за острый конец A, б) за середниу



Рнс. 164.

оснований B. В обоих случаях определнть, как надо сместить точку подвеса, чтобы получить миннмальиый период колебаний.

ГЛАВА VII

ТЕПЛОВОЕ ДВИЖЕНИЕ МОЛЕКУЛ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ВОЗДУХА В АТМОСФЕРЕ

§ 1. Условие равновесия в атмосфере

Рассмотрим вопрос о законе распределения плотности воздуха в атмосфере по высоте. Хорошо известно, что на большой высоте воздух менее плотен, давление воздуха меньше, чем на уровне моря. Причина зависимости давления от высоты очевидна: выделим мысленно цилиндрический объем (высота Δh, площадь основания S, объем $S\Delta h$). Воздух, находящийся в этом объеме (средняя плотность $\bar{\rho}$, масса $m=\bar{\rho}\Delta hS$), притягивается к земле, т. е. испытывает силу тяготения, направленную вниз и равную $mg=\bar{\rho}\Delta hSg$. Однако этот объем не падает, а находится в покое благодаря тому, что на него снизу на высоте h действует давление $p(h)$ большее, чем давление сверху на высоте $h+\Delta h$, равное $p(h+\Delta h)$ (рис. 165). Сила давления на нижнее основание цилиндра равна $Sp(h)$; это давление уравновешивает сумму силы давления на верхнее основание и силы тяжести:

$$Sp(h)=Sp(h+\Delta h)+\bar{\rho}\Delta hSg. \quad (1.1)$$

Рис. 165.

Формулу (1.1) можно записать так:

$$p(h)-p(h+\Delta h)=\bar{\rho}\Delta hg. \quad (1.2)$$

Будем считать, что Δh весьма мало. Тогда нет надобности говорить о средней плотности $\bar{\rho}$, так как высоты h и $h+\Delta h$

весьма близки и $\bar{\rho}$ весьма мало отличается от $\rho(h)$. Поэтому (1.5) принимает вид

$$\frac{dp}{dh} = -g\rho. \tag{1.3}$$

Мы получили дифференциальное уравнение для зависимости $p(h)$. При этом в уравнение вошла плотность воздуха ρ.

Величины p и ρ связаны между собой законом Бойля-Мариотта. Мы будем предполагать, что температура атмосферы одинакова на всех высотах. На самом деле температура воздуха зависит от притока тепла от солнца и отвода тепла в основном за счет излучения тепла в мировое пространство воздухом или, точнее, водяными парами и углекислотой, содержащимися в воздухе. Небольшая часть лучей солнечного спектра поглощается верхними, очень разреженными слоями воздуха. Большая часть энергии солнечного света доходит до поверхности земли, поглощается почвой, а уже от почвы нагревается воздух. Поэтому в действительности в атмосфере получается довольно сложное распределение температуры: на уровне земли температура, как мы хорошо знаем, колеблется примерно от $-40°$ до $+40°$ C в зависимости от географического положения и времени года, на высоте около 15 *км* температура минимальна — около $-80°$ C — и примерно одинакова зимой и летом на всем земном шаре; на больших высотах температура возрастает, достигая $+60°$ C — $+75°$ C на высоте 50—60 *км*.

Измерения, проделанные в последнее время при помощи искусственных спутников Земли, показывают, что на высоте 300—1000 *км* плотность воздуха хотя и мала, но все же значительно больше, чем предполагалось раньше. Как мы увидим ниже, большая плотность воздуха указывает на то, что в этих высоких слоях температура воздуха весьма высока. К тому же значительная часть молекул кислорода и азота распадается на этой высоте на атомы, ионы и электроны.

Если бы не было притока тепла извне и отвода тепла, т. е. если рассматривать теплоизолированный столб воздуха, то с течением времени температура во всем столбе должна была бы выровняться. Ниже мы будем рассматривать именно такой идеализированный случай полного равновесия, теплового и механического. Тепловое равновесие заключается в том, что температура везде одинакова, следовательно, нет

потоков тепла (если бы в различных точках воздушного столба температура была различна, то от более нагретых точек потекло бы тепло к менее нагретым, т. е. возникли бы потоки тепла). Механическое равновесие заключается в том, что равнодействующая всех сил иа любой объем воздуха, выделенный в атмосфере, равна нулю; при этом надо рассматривать силу тяжести воздуха в объеме и силу давления на всю поверхность, ограничивающую данный объем.

При том распределении давления, которое удовлетворяет уравнению (1.3), атмосфера может находиться в состоянии покоя.

Так как мы рассматриваем высоты h, малые по сравнению с радиусом Земли, то g — ускорение силы тяжести — можно считать постоянной величиной.

§ 2. Связь между плотностью и давлением

По закону Бойля-Мариотта произведение давления газа на занимаемый им объем постоянно для данной массы m_0 газа и при данной температуре

$$pv = a,$$

где a — постоянная величина. Обозначая плотность газа через ρ, получим $m_0 = v\rho$. Следовательно, $v = m_0/\rho$, а так как $p = a/v$, то

$$p = b\rho, \tag{2.1}$$

где положеио $b = a/m_0$. Таким образом, давлеиие газа прямо пропорциоиальио его плотности.

Коэффициент пропорциональности для воздуха комнатной температуры легко иайти. Известио, что атмосфериое давлеиие на уровне моря p_0 приблизительно равио $1\ кГ/см^2 = 10^6\ дин/см^2$. Плотность воздуха ρ_0 при давлении p_0 равна *) примерно $1{,}3 \cdot 10^{-3}\ г/см^2$. Подставляя p_0 и ρ_0 в формулу (2.1), получим $p_0 = b\rho_0$, откуда

$$b = \frac{10^6}{1{,}3 \cdot 10^{-3}} = 7{,}7 \cdot 10^8.$$

*) Эту величину легко иайти эксперимеитально прн помощи взвешиваиия. Берут сосуд известиого объема с герметичиым краном и сначала взвешнвают его с воздухом, а потом без воздуха, откачав воздух нз сосуда вакуумиым насосом.

Отметим, что по размерности величина b есть квадрат скорости. В действительности эта величина тесно связана со скоростью молекул и со скоростью звука: квадрат скорости звука равен 1,4 b (выводить это соотношение не будем).

Для дальнейшего нам нужно не только численное значение b для воздуха комнатной температуры, но и общее выражение постоянной b для любого газа и при любой температуре. Для этого воспользуемся законом Клапейрона

$$pV = RT, \tag{2.2}$$

где V — объем, занимаемый одной грам-молекулой*) газа, T — абсолютная температура (отсчитываемая от абсолютного нуля, соответствующего — 273° С**)), R есть так называемая универсальная газовая постоянная. Известно, что при температуре 0° С, равной 273° абсолютных, при атмосферном давлении, т. е. при $p_0 = 10^6$ *дин/см*^{2}, одна грамм-молекула газа занимает объем, равный $22{,}4$ *л* $= 2{,}24 \cdot 10^4$ *см*^{3} (закон Авогадро)***). Отсюда $10^6 \cdot 2{,}24 \cdot 10^4 = R \cdot 273$. Тогда

$$R = 8{,}3 \cdot 10^7 \, \frac{\textit{дин} \cdot \textit{см}^3}{\textit{моль} \cdot \textit{см}^2 \cdot \textit{град}} = 8{,}3 \cdot 10^7 \, \frac{\textit{эрг}}{\textit{град} \cdot \textit{моль}}.$$

Обозначим молекулярный вес газа через M. Для водорода H_2 $M = 2$, для гелия He $M = 4$, для азота N_2 $M = 28$, для воздуха среднее значение $M = 29{,}4$. По определению V содержит M граммов газа. Значит, плотность ρ связана с V соотношением

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \text{или} \quad V = \frac{M}{\rho}.$$

Подставляя это выражение для V в (2.2), получаем:

$$p = \rho \frac{RT}{M}. \tag{2.3}$$

Сравнивая формулы (2.3) и (2.1), находим:

$$b = \frac{RT}{M}. \tag{2.4}$$

*) Одна грамм-молекула газа сокращенно называется «однн моль».

**) Иногда абсолютную температуру отмечают буквой «К», по именн англнйского ученого Кельвнна, напрнмер, 20° С = 293° К, чнтается «20 градусов Цельсня равны 293 градусам Кельвнна».

***) Прн этом мы пренебрегаем малымн разлнчнямн между 1 атмосферой н 1 *кГ/см*^{2} н между 1 *кГ* н 10^6 *дин*.

Наконец, выразим давление через число молекул n, содержащихся в единице объема газа. Известно, что одна грамм-молекула любого вещества содержит $6\cdot10^{23}$ молекул. Величина $6\cdot10^{23}$ называется числом Авогадро и обозначается A. Таким образом, масса одной молекулы

$$m=\frac{M}{A}=\frac{1}{6\cdot10^{23}}M. \tag{2.5}$$

Если одна грамм-молекула занимает объем V, то число молекул в единице объема n есть $n=\frac{A}{V}$. Плотность газа $\rho=nm$. Закон Клапейрона (2.2) дает:

$$p=n\frac{RT}{A}=nkT,$$

где k — постоянная Больцмана,

$$k=\frac{R}{A}=\frac{8{,}3\cdot10^{7}}{6\cdot10^{23}}=1{,}38\cdot10^{-16}\,\frac{\textit{эрг}}{\textit{град}}.$$

Величина R относится к условно выбранному количеству вещества — одной грамм-молекуле, поэтому в размерность R входит «моль». Величина k относится к одной молекуле, поэтому k имеет размерность *эрг/град*. Величина kT имеет размерность энергии (*эрг*). В § 4 будет показано, что в атмосфере величина kT равна средней потенциальной энергии одной молекулы в поле тяжести при температуре T. Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы равна $\frac{3}{2}kT$.

§ 3. Распределение плотности

Из формулы (2.1) находим $\rho=\frac{p}{b}$. Подставляя это в дифференциальное уравнение для плотности воздуха (1.3), получим:

$$\frac{dp}{dh}=-\frac{g}{b}p.$$

Решение этого уравнения есть $p=Ce^{-\frac{g}{b}h}$, где C определяется из начального условия. Пусть при $h=0$ $p=p_0$,

тогда

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{b} h}. \qquad (3.1)$$

Поделив равенство (3.1) на $\bar{b}$, получим:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{b} h}, \qquad (3.2)$$

где ρ_0 — плотность воздуха при $h = 0$ (т. е. на уровне моря). Из формулы (3.1) видно, что на высоте $H = \frac{b}{g}$ над уровнем моря давление воздуха уменьшается в e раз.

Получим формулу, связывающую величину H с величиной kT: $H = \frac{b}{g}$; пользуясь формулами (2.4) и (2.5), находим $H = \frac{RT}{Amg}$, откуда

$$H = \frac{kT}{mg}. \qquad (3.3)$$

Подсчитаем величину H, пользуясь формулой $H = \frac{b}{g}$,

$$H = \frac{7{,}7 \cdot 10^8 \, см^2/сек^2}{10^3 \, см/сек^2} = 7{,}7 \cdot 10^5 \, см = 7{,}7 \, км.$$

При помощи величины H формулы (3.1) и (3.2) можно записать так:

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{H}}, \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}}.$$

С увеличением высоты в арифметической прогрессии давление и плотность падают в геометрической прогрессии: если $h = 0$, то $p = p_0$, $\rho = \rho_0$; если $h = H$, то $p = \frac{p_0}{e} = 0{,}368 \cdot p_0$, $\rho = 0{,}368\rho_0$; если $h = 2H$, то $p = \frac{p_0}{e^2} = 0{,}135p_0$, $\rho = 0{,}135\rho_0$; если $h = 3H$, то $p = \frac{p_0}{e^3} = 0{,}05p_0$, $\rho = 0{,}05\rho_0$.

Зная зависимость плотности от высоты, можно выразить через ρ_0 и H полную массу воздуха m_a в столбе с площадью основания 1 $см^2$. Действительно,

$$m_a = \int_0^\infty \rho \, dh = \int_0^\infty \rho_0 e^{-\frac{h}{H}} \, dh.$$

Сделаем замену переменной $z=\frac{h}{H}$; тогда $dz=\frac{1}{H}dh$,

$$m_a=\rho_0 H\int_0^\infty {}^{-z}\,dz=-\rho_0 He^{-z}\Big|_0^\infty=\rho_0 H.$$

При помощи соотношения $m_a=\rho_0 H$ подсчитаем (для контроля) еще раз величину H. Так как атмосферное давление равно $1\ \kappa\Gamma/c\mathit{м}^2$, то масса воздуха в столбе с основанием $1\ c\mathit{м}^2$ как раз и равна $1\ \kappa\mathit{г}$. Таким образом, $m_a=1\ \kappa\mathit{г}/c\mathit{м}^2=1000\ \mathit{г}/c\mathit{м}^2$. Зная $\rho_0=1{,}3\cdot 10^{-3}\ \mathit{г}/c\mathit{м}^3$, отсюда получим:

$$H=\frac{m_a}{\rho_0}=\frac{10^3}{1{,}3\cdot 10^{-3}}=7{,}7\cdot 10^5\ c\mathit{м}$$

в соответствии с прежним расчетом.

Найдем среднюю высоту, на которой находится воздух, т. е. высоту центра тяжести вертикального цилиндрического столба воздуха. Чтобы не вводить лишних величин, рассматриваем столб воздуха с основанием $1\ c\mathit{м}^2$, однако ясно, что высота центра тяжести от площади основания цилиндра не зависит. На высоте h между h и $h+dh$ находится масса $dm=\rho\,dh$. Средняя высота равна

$$\overline{h}=\frac{\int_0^\infty h\,dm}{m_a}=\frac{\int_0^\infty h\rho(h)\,dh}{\int_0^\infty \rho(h)\,dh}.$$

Найдем интеграл, стоящий в числителе. Пользуясь формулой (3.3), получаем

$$\int_0^\infty h\rho(h)\,dh=\int_0^\infty h\rho_0 e^{-\frac{h}{H}}\,dh=\rho_0 H^2\int_0^\infty ze^{-z}\,dz=\rho_0 H^2$$

$\left(\int_0^\infty ze^{-z}\,dz=1,\right.$ см. формулу (3.8) главы III$\left.\right)$. Окончательно находим:

$$\overline{h}=\frac{\rho_0 H^2}{\rho_0 H}=H. \qquad (3.4)$$

Таким образом, та высота H, на которой плотность и давление воздуха убывают в e раз, одновременно является и *средней* высотой, на которой находится воздух.

Аналогичный результат получился раньше при рассмотрении радиоактивного распада (§ 3 главы V): если вероятность распада равна $\omega \frac{1}{сек}$, $\frac{dn}{dt} = -\omega n$, $n = n_0 e^{-\omega t}$, то за время $\tau = \frac{1}{\omega}$ количество радиоактивного вещества убывает в e раз; при этом среднее время жизни радиоактивного атома оказалось равным той же величине $\overline{t} = \tau = \frac{1}{\omega}$.

Напомним, что простая зависимость (3.3) плотности и давления от высоты относится к случаю постоянной температуры. В действительности распределение плотности и давления несколько отличается от формулы (3.3) и зависит от времени года и т. п.

Упражнения

1. Найти давление воздуха в шахте на глубине 1 *км*, 3 *км*, 10 *км*.
2. Найти зависимость давления воздуха от высоты при температуре воздуха −40°C, то же для +40°C.
3. Пусть температура воздуха меняется при изменении высоты по закону $\frac{dT}{dh} = -\alpha T_0$, где T_0 — температура воздуха на поверхности земли, α — постоянный коэффициент. Найти зависимость давления воздуха от высоты.
4. Известно, что в условиях задачи 3 величина $\alpha \approx 0{,}07 \cdot 10^{-5}$ *см*$^{-1}$. Определить, пользуясь результатом задачи 3, давление воздуха в шахте на глубине 1 *км*, 3 *км*, 10 *км*. Считать, что на поверхности земли температура равна нулю. Сравнить результаты с результатами задачи 1.

§ 4. Молекулярно-кинетическая теория распределения плотности

В предыдущих параграфах было найдено распределение плотности воздуха по высоте при действии силы тяжести в состоянии равновесия. При этом мы рассматривали воздух как сплошную среду с данной зависимостью давления от плотности.

Подойдем теперь к полученному результату с иной точки зрения, а именно с точки зрения молекулярной теории.

Будем рассматривать отдельные молекулы и их движение. Представление о том, что вещество состоит из отдельных атомов, было высказано еще в Древней Греции. Однако *движение* молекул и связь его с теплотой впервые стал рассматривать великий русский ученый М. В. Ломоносов, который является, таким образом, основателем молекулярно-кинетической теории.

Газовое состояние отличается от жидкого и твердого состояний тем, что в газе молекулы можно рассматривать как независимые, не взаимодействующие между собой. Движение молекул газа представляет собой свободный полет по инерции. Время от времени молекулы газа сталкиваются между собой. В обычных условиях столкновения молекул между собой происходят чрезвычайно часто, участки пути, которые молекулы пролетают от одного столкновения до другого, весьма малы.

При атмосферном давлении и температуре $0°$ C в 22,4 *л* газа содержится 1 грамм-молекула, т. е. $6\cdot10^{23}$ молекул; в 1 $см^3$ содержится $n=\frac{6\cdot10^{23}}{2{,}24\cdot10^4}=2{,}7\cdot10^{19}$ молекул.

Грубо будем рассматривать молекулы как шарики радиусом около $2\cdot10^{-8}$ *см* *). Тогда для того, чтобы произошло столкновение двух молекул, надо, чтобы траектория центра одной молекулы попала в мишень радиусом $4\cdot10^{-8}$ *см* вокруг центра другой молекулы. Площадь такой мишени $\sigma=\pi r^2\approx5\cdot10^{-15}$ $см^2$. Значит, на пути в 1 *см* данная молекула сталкивается со всеми теми молекулами, центры которых находятся в цилиндре с площадью основания $5\cdot10^{-15}$ $см^2$ и длиной 1 *см*. Объем такого цилиндра равен σ $см^3$, и число молекул в нем равно $n\sigma$, где n — число молекул в 1 $см^3$.

Таким образом, на пути в 1 *см* молекула испытывает $n\sigma$ столкновений. Поэтому среднее расстояние свободного полета от одного столкновения до другого

$$l=\frac{1}{n\sigma}=0{,}7\cdot10^{-5}\ см.$$

Эта величина называется длиной свободного пробега.

*) В действительности двухатомные молекулы, например молекулы кислорода и азота, более похожи на пары слепленных шаров, вроде арахиса с двумя ядрами в одной скорлупке.

Вследствие столкновений молекула летит не по прямой, а по ломаной линии; однако объем цилиндра, образованного ломаными, не отличается от объема прямого цилиндра, поэтому расчет остается правильным.

На самом деле надо еще учесть, что движется не только рассматриваемая молекула, но и те молекулы, с которыми она сталкивается. Можно доказать, что это обстоятельство мало меняет длину свободного пробега, а именно, уменьшает ее всего в 1,5 раза.

Скорости молекул порядка 300—500 *м/сек*. Следовательно, время свободного пробега, т. е. среднее время от одного столкновения до другого, порядка

$$\tau = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{4}} \approx 10^{-10} \text{ сек.}$$

На первый взгляд величины $l \approx 10^{-5}$ *см* и $\tau \approx 10^{-10}$ *сек* очень малы. Однако их надо сравнить с размером молекулы, радиус которой $r \approx 2 \cdot 10^{-8}$ *см*, и с длительностью самого столкновения, которая меньше $\frac{r}{v} \approx 10^{-13}$ *сек*. После такого сравнения видно, что молекулы газа *редко* сталкиваются друг с другом. Молекулы при атмосферном давлении 99,9% времени проводят в полете и лишь 0,1% времени находятся в состоянии столкновения.

Столкновения молекул между собой в газе не влияют на давление газа и не влияют на закон распределения плотности газа в атмосфере. Подтверждение этого заключается в законах Бойля-Мариотта и Клапейрона. В § 2 эти законы были записаны в виде $p = nkT$.

Давление газа зависит от числа молекул в единице объема, но радиус молекул r и их сечение σ не входят в формулу. Значит, величины r и σ не могут войти и в формулу распределения плотности по высоте.

Перепишем формулу распределения плотности (3.2), выразив b через молекулярные величины. Так как $b = \frac{RT}{M} = \frac{AkT}{Am} = \frac{kT}{m}$, то

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{gh}{b}} = \rho_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \qquad (4.1)$$

Разделим обе части формулы (4.1) на m, где m обозначает массу одной молекулы. Заметим, что $\frac{\rho}{m} = n$ — число молекул в единице объема на высоте h, $\frac{\rho_0}{m} = n_0$ — число молекул в единице объема на уровне моря. Формула (4.1) принимает вид

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \qquad (4.2)$$

Величина mgh есть потенциальная энергия молекулы, масса которой равна m, находящейся на высоте h, если за нуль принять потенциальную энергию молекулы на уровне моря. Потенциальную энергию молекулы $u(0)$ на уровне моря можно выбрать произвольно (см. § 2 главы VI). Тогда

$$u(h) = u(0) + mgh,$$

откуда

$$mgh = u(h) - u(0).$$

Формулу (4.2) можем записать в виде

$$n(h) = n(0) e^{-\frac{u(h) - u(0)}{kT}}.$$

Это — закон распределения числа молекул по высоте. Ему можно придать следующий вид:

$$n(h) = Be^{-\frac{u(h)}{kT}},$$

где B есть константа, определяемая по значению плотности на уровне моря ($h = 0$)

$$n(0) = Be^{-\frac{u(0)}{kT}}.$$

Замечательно то обстоятельство, что плотность молекул на той или иной высоте зависит только от потенциальной энергии молекул в данном месте: масса молекулы m, ускорение силы тяжести g и высота h вошли в формулу (4.2) как раз в том сочетании (mgh), в котором они входят в выражение для потенциальной энергии u.

Найдем среднее значение потенциальной энергии молекулы $\bar{u} = \overline{mgh} = mg\bar{h} = mgH$ [см. формулу (3.4)]. Пользуясь

формулой (3.3), получаем:

$$\bar{u} = mgH = mg\frac{kT}{mg} = kT.$$

Итак, средняя потенциальная энергия одной молекулы равна kT.

Мы установили, что распределение молекул воздуха в атмосфере зависит от температуры и потенциальной энергии молекул. Однако при данной средней потенциальной энергии, равной kT, получаем определенное *распределение* молекул по потенциальной энергии. Часть молекул — те, которые находятся ниже высоты H, — имеет потенциальную энергию меньше kT. Найдем отношение числа таких молекул к общему числу молекул. Это отношение есть

$$\frac{\int\limits_0^H n\,dh}{\int\limits_0^\infty n\,dh} = \frac{n_0\int\limits_0^H e^{-\frac{mgh}{kT}}\,dh}{n_0\int\limits_0^\infty e^{-\frac{mgh}{kT}}\,dh}.$$

Подсчитаем входящие сюда интегралы:

$$\int\limits_0^H e^{-\frac{mgh}{kT}}\,dh = -\frac{kT}{mg}e^{-\frac{mgh}{kT}}\Bigg|_0^H = \frac{kT}{mg}\left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}\right) = \frac{kT}{mg}(1 - e^{-1}),$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{mgh}{kT}}\,dh = -\frac{kT}{mg}e^{-\frac{mgh}{kT}}\Bigg|_0^\infty = \frac{kT}{mg}.$$

Поэтому

$$\frac{\int\limits_0^H n\,dh}{\int\limits_0^\infty n\,dh} = \frac{\frac{kT}{mg}(1-e^{-1})}{\frac{kT}{mg}} = 1 - e^{-1} \approx 0,63.$$

Таким образом, 63% всех молекул имеют потенциальную энергию меньше средней, а 37% имеют потенциальную энергию больше средней. При этом нетрудно подсчитать,

что потенциальную энергию больше $2kT$ имеют 14% всех молекул, а больше $3kT$ — 5% всех молекул, и т. д. Вообще, доля молекул, имеющих потенциальную энергию больше данной величины u, равна $e^{-\frac{u}{kT}}$.

§ 5. Броуновское движение и распределение молекул по кинетической энергии

Более ста лет назад английский ботаник Броун заметил, что мельчайшие, видимые в микроскоп пылинки находятся в непрерывном движении. Эйнштейн высказал предположение, что это движение пылинок представляет собой их тепловое движение. Отсюда, в частности, следовал вывод, что пылинки не будут все лежать на дне сосуда, а будут распределены по высоте по такому же закону, по которому распределены молекулы.

Если пылинка имеет форму шара диаметром $d = 5 \cdot 10^{-5}$ *см*, то ее объем равен $\frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-14}$ *см*^{3}, и при плотности $\rho = 1$ *г/см*^{3} масса пылинки равна $6{,}5 \cdot 10^{-14}$ *г*. При комнатной температуре $T = 17^\circ\,\mathrm{C} = 290^\circ\,\mathrm{K}$ такие пылинки распределены по высоте [согласно формуле (4.2)] по закону

$$n = n_0 e^{-\frac{6{,}5 \cdot 10^{-14} \cdot 981}{290 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16}} h}$$

или $n = n_0 e^{-1{,}6 \cdot 10^3 h}$. Таким образом, число пылинок в единице объема уменьшается в e раз при увеличении высоты на величину $\frac{1}{1{,}6 \cdot 10^3}$ *см* $= 0{,}62 \cdot 10^{-3}$ *см*.

Наблюдая распределение по высоте пылинок известного размера и плотности, можно получить значение постоянной Больцмана k. С другой стороны, закон Клапейрона дает величину $R = kA$, после чего можно найти число Авогадро. Эта работа, проведенная Эйнштейном и Перреном в 1903—1907 гг., явилась важнейшим экспериментальным подтверждением всей атомно-молекулярной теории и сыграла огромную роль в развитии физики.

При движении молекул под действием силы тяжести все время происходит превращение энергии: если молекула в данный момент движется вниз, то потенциальная энергия

переходит в кинетическую; если же молекула движется вверх, то кинетическая энергия переходит в потенциальную. Когда газ находится в состоянии равновесия, т. е. давление газа уравновешивает силу тяжести, то в действительности молекулы газа движутся хаотически с большими скоростями. Однако если мысленно выделить в газе какую-нибудь горизонтальную плоскость, то число молекул, проходящих за единицу времени через эту плоскость снизу вверх, равно числу молекул, проходящих за то же время сверху вниз, так что в среднем газ покоится. В состоянии равновесия

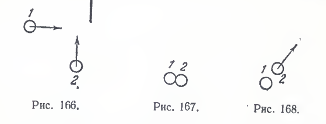


Рис. 166. Рис. 167. Рис. 168.

переход кинетической энергии в потенциальную и переход потенциальной энергии в кинетическую взаимно уравновешены, так как число молекул, двигающихся вверх, равно числу молекул, двигающихся вниз.

Отметим, что при хаотическом движении отдельные (одинаковые) молекулы имеют различную скорость, т. е. различную кинетическую энергию. Действительно, если сталкиваются между собой два шарика, скорости которых равны по величине, но направлены под углом одна к другой, то после столкновения скорости шариков могут быть различны. На рис. 166—168 показан пример столкновения, после которого один шарик, лежащий слева, останавливается, а другой, двигавшийся снизу, движется с удвоенной энергией [положения: на рис. 166—до столкновения, 167—момент столкновения, 168—после столкновения]. Обратите внимание на то, как расположены шарики в момент столкновения; если бы второй шарик во время столкновения был расположен ниже первого, то он остановился бы, отдав всю энергию первому шарику.

Так как при движении молекул происходит взаимное превращение кинетической и потенциальной энергий, то естественно предположить, что распределение молекул по

кинетической энергии похоже на их распределение по потенциальной энергии.

Приведем без доказательства результат расчетов, проделанных в конце XIX века Максвеллом и Больцманом. Число молекул, имеющих составляющие скорости

по оси x между v_x и $v_x + dv_x$,
по оси y между v_y и $v_y + dv_y$,
по оси z между v_z и $v_z + dv_z$,

равно

$$dn = \frac{n_0}{\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}{2kT}} dv_x\, dv_y\, dv_z, \qquad (5.1)$$

где n_0 — полное число молекул, m — масса одной молекулы. Отметим, что $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, где v — величина скорости молекулы. Поэтому (5.1) в показателе степени содержит величину $\frac{mv^2}{2} : kT$, т. е. отношение кинетической энергии к потенциальной. Средняя кинетическая энергия, подсчитанная согласно закону (5.1), оказалась равной $\frac{3}{2} kT$. Для числа молекул n, кинетическая энергия которых больше заданной величины E, получилась довольно сложная зависимость. Однако эта сложная зависимость приближенно может быть описана простой формулой

$$n = n_0 e^{-\frac{E}{kT}} \qquad (5.2)$$

Из закона (5.2) получается неверное значение средней кинетической энергии молекул

$$\overline{E}_{\text{кин}} = \frac{\int\limits_0^\infty n\,dE}{n_0} = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}\,dE = kT$$

вместо $\frac{3}{2} kT$. Этот закон дает заметные отклонения от истинного, если E есть величина порядка kT. Однако при $E \gg kT$ расхождение между точным и приближенным законами становится несущественным.

Отметим, что при равной температуре молекулы с различной массой имеют равные средние кинетические энергии и одинаково распределены по величине кинетической энергии, так как средняя скорость молекулы пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{m}}$, где m — масса молекулы.

Рассматривая столкновения молекул со стенками сосуда, можно найти давление газа; оно оказывается равным

$$p = \frac{2}{3} n_0 \overline{E}_{\text{кин}}.$$

Полагая здесь $\overline{E}_{\text{кин}} = \frac{3}{2} kT$, получим закон Клапейрона

$$p = n_0 kT.$$

При столкновении молекул между собой происходит не только обмен кинетической энергией между молекулами, но и превращение кинетической энергии движения молекул в энергию вращения молекулы, а также в энергию колебаний атомов в молекуле, т. е. во внутреннюю энергию молекулы. Возможен и обратный процесс, когда при столкновении часть внутренней энергии молекул переходит в кинетическую энергию. Поэтому естественно, что и распределение молекул по величине их внутренней энергии W также подчиняется закону пропорциональности величине $e^{-\frac{W}{kT}}$. Показательная зависимость числа частиц, обладающих той или иной энергией, от величины энергии является всеобъемлющим универсальным законом природы.

§ 6. Скорости химических реакций

Для чего нужен закон распределения молекул по кинетической энергии? Такие важные характеристики газа, как его давление на стенки сосуда, теплоемкость, общий запас энергии в объеме газа, определяются средними величинами. Поэтому они определяются той наибольшей частью молекул, энергия которых близка к среднему значению энергии. Для чего же нам нужно знать, например, что есть ничтожная

доля (порядка 0,00001%) молекул, кинетическая энергия которых больше 17 kT? Ведь эти отдельные молекулы с очень большой энергией на величину давления и на общий запас энергии газа практически не влияют.

Картина, однако, резко меняется, если рассматривать химические реакции. Оказывается, что именно эти редкие молекулы с большой энергией полностью определяют ход химических реакций. Загадка химических реакций заключается в том, что молекулы, вступающие в реакцию, сталкиваются между собой каждые 10^{-10} *сек*, между тем реакция часто требует нескольких минут (а иногда и часов) для своего завершения. Значит, только редчайшая часть всех столкновений приводит к химической реакции.

Высказывались предположения, что у молекул есть какое-то очень маленькое «чувствительное место», в которое нужно попасть, чтобы произошла реакция. Эта точка зрения похожа на легенду о греческом герое Ахиллесе, который был неуязвим везде, кроме пятки.

Однако правильное объяснение, которое дал в конце XIX века шведский ученый Сванте Аррениус, заключается в том, что к реакции приводит только столкновение молекул, энергия которых превышает определенное значение, так называемую энергию активизации E_A.

Когда, например, сталкиваются молекулы водорода и йода и образуются две молекулы йодистого водорода HJ, то нужно, чтобы энергия сталкивающихся молекул была больше $3\cdot10^{-12}$ *эрг*. Для сравнения отметим, что при 0° С величина $kT = 1{,}38\cdot10^{-16}\cdot273 \approx 3{,}8\cdot10^{-14}$ *эрг*. Таким образом, при комнатной температуре нужной энергией обладает лишь ничтожная часть молекул $\alpha = e^{-\nu}$, где $\nu = 3\cdot10^{-12}/3{,}8\cdot10^{-14} \approx 80$, откуда получим $\alpha = \frac{1}{10^{35}}$.

Время реакции получим, умножая время между двумя столкновениями (оно порядка 10^{-10} *сек*) на то среднее число столкновений, среди которых встретится одно столкновение с нужной энергией. Это среднее число столкновений порядка $\frac{1}{\alpha} = 10^{35}$. Получим время реакции при 0° С порядка 10^{25} *сек* $\approx 3\cdot10^{17}$ лет. Этот результат согласуется с тем фактом, что при 0° С реакция $H_2 + J_2 = 2HJ$ практически ненаблюдаема.

Из приведенных соображений следует, что в зависимости от температуры время реакции выражается формулой

$$t = \tau e^{\frac{E_A}{kT}},$$

где τ — время между двумя столкновениями, E_A — энергия активации. Эта формула правильно описывает зависимость скорости химических реакций от температуры. Характерная особенность формулы — крайне резкое уменьшение времени реакции и увеличение скорости реакции при небольшом изменении температуры.

Часто, однако, в химических реакциях дело обстоит гораздо сложнее, потому что реакции могут идти через различные промежуточные стадии. Советскому ученому академику Н. Н. Семенову принадлежит заслуга всестороннего исследования сложных (цепных) химических реакций, выяснения законов протекания таких реакций и общих причин, приводящих к протеканию реакции по сложной схеме.

В качестве примера рассмотрим реакцию

$$H_2 + Cl_2 = 2HCl.$$

Эта реакция идет не путем столкновений молекул водорода с молекулой хлора, а по схеме

$$H_2 + Cl_2 = H_2 + Cl + Cl; \quad Cl + H_2 = HCl + H;$$
$$H + Cl_2 = HCl + Cl.$$

В результате для фактически наблюдаемой скорости реакции получаются сложные зависимости. Однако для каждой отдельной реакции, например для

$$Cl + H_2 = HCl + H \text{ (в реакции } H_2 + Cl_2 = 2HCl),$$

имеет место закон Аррениуса, скорость реакции пропорциональна $e^{\frac{-E_A}{kT}}$, причем величина энергии активации E_A имеет различное значение для каждой реакции.

§ 7. Испарение. Ток эмиссии катода

Идея Сванте Аррениуса, о роли относительно малого числа молекул, энергия которых намного превосходит среднее значение энергии, помогает разобраться не только

в химических реакциях, но и в ряде других явлений. К таким явлениям относится испарение жидкости.

Для испарения жидкости нужно затратить значительную энергию. Так, например, для испарения 1 *г* воды при 100° С нужно затратить *) около 540 калорий. На одну молекулу это составляет **) $Q = \frac{18 \cdot 540 \cdot 4{,}18 \cdot 10^7}{6 \cdot 10^{23}} \approx 7 \cdot 10^{-13}$ *эрг*, при $T = 0°\,C = 273°\,K$, $kT = 3{,}8 \cdot 10^{-14}$; поэтому $\frac{Q}{kT} \approx 20$. Оторваться от поверхности жидкости и испариться могут лишь те молекулы, энергия которых превышает теплоту испарения Q; доля таких молекул равна $e^{-\frac{Q}{kT}}$. Поэтому и скорость испарения пропорциональна $e^{-\frac{Q}{kT}}$. Заметим, что для удобства расчетов принято умножать числитель и знаменатель выражения $\frac{Q}{kT}$ на число Авогадро A

$$\frac{Q}{kT} = \frac{QA}{kAT} = \frac{QA}{RT}.$$

Величина QA есть теплота испарения $6 \cdot 10^{23}$ молекул, т. е. теплота испарения одной грамм-молекулы. Величина $kA = R$ есть универсальная газовая постоянная. В тепловых единицах (малые калории на грамм-моль)

$$R = \frac{8{,}3 \cdot 10^7}{4{,}18 \cdot 10^7} \approx 2 \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}}.$$

Теплота испарения одного моля воды равна

$$Q_m = 18 \cdot 540 \approx 10\,000 \ \text{кал/моль}.$$

Таким образом, скорость испарения воды пропорциональна

$$e^{-\frac{10\,000}{2T}} = e^{-\frac{5000}{T}}.$$

Рассмотрим насыщенный пар над поверхностью воды. Если пар является насыщенным, то число молекул воды,

*) Теплота испарения мало зависит от температуры: для воды $Q = 540$ *кал/г* при 100° С и 600 *кал/г* при 0° С. В дальнейшем этой зависимостью пренебрегаем.

**) Молекулярный вес воды — 18, число Авогадро — $6 \cdot 10^{23}$, 1 *кал* $= 4{,}18 \cdot 10^7$ *эрг*.

испаряющнхся в единицу времени, равно чнслу молекул, находнвшнхся в паре и прнлипающих к поверхностн воды (конденсирующихся) в единицу времени. Скорость испарения равна

$$Ce^{-\frac{Qm}{RT}},$$

где C — постоянная величина, пропорциональная площади поверхности воды. Скорость конденсации пропорциональна давлению паров воды и также пропорциональна площади поверхности воды. Следовательно, в случае насыщенного пара, когда скорости испарения и конденсации равны,

$$Dp = Ce^{-\frac{Qm}{RT}},$$

где D и C — величины, пропорциональные площади поверхности, слабо зависящие от температуры и вовсе не зависящие от давления, откуда

$$p = Fe^{-\frac{Qm}{RT}},$$

где постоянная F не зависит от величины площади поверхности воды. Таким образом, устанавливается связь между давлением насыщенного пара и теплотой испарения.

Рассмотрим еще один процесс, похожий на испарение, — испускание электронов нагретой поверхностью. Этот процесс осуществляется на катоде радиоламп. Холодный катод в пустоте не испускает электронов*). Однако при высокой температуре катод испускает электроны. При этом если на анод подан достаточно высокий положительный потенциал, то анод притягивает электроны и каждый электрон, оторвавшийся от поверхности катода, попадает на анод. Электрический ток, протекающий в цепи через радиолампу, равен произведению числа электронов, испускаемых катодом в единицу времени, на величину заряда одного электрона.

---

*) Мы здесь не рассматриваем случай очень сильного электрического поля (10^6 *в/см* и больше), способного вырывать электроны даже из холодного катода. Не рассматривается также выбивание электронов из катода действием света или бомбардировкой катода электронами, ионами или другими частицами.

Опыт показывает, что в этих условиях имеет место следующая зависимость силы тока от температуры:

$$j = ge^{-\frac{Q}{kT}}.$$

Величина Q для различных катодов различна. Например, для катода из чистого вольфрама $\frac{Q}{k} = 55\,000°$, для катода из окиси бария $\frac{Q}{k} = 30\,000°$, и, следовательно, такой катод может работать при более низкой температуре. По зависимости j от T можно определить величину $\frac{Q}{k}$. При этом величина Q, которая входит в последнюю формулу, совпадает с энергией, необходимой для того, чтобы вырвать электрон из катода*).

Радиолампа дает замечательный способ измерения распределения электронов, вылетающих с поверхности катода, по скоростям при данной температуре. Для этого при нагретом катоде дадим на анод небольшой отрицательный потенциал φ. При таком потенциале анод отталкивает электроны, испускаемые катодом. Поэтому большая часть электронов, не долетев до анода, повернет назад и упадет обратно на катод. Однако будут и такие электроны, которые все-таки попадут на анод, преодолев его отталкивание. Для этого нужно, чтобы кинетическая энергия электрона, вылетевшего с катода, превосходила разность потенциальной энергии у анода и у катода, т. е. величину $e\varphi$. Доля таких электронов равна $e^{\frac{-e\varphi}{kT}}$. Таким образом, при отрицательном потенциале анода φ ток равен $j = j_0 e^{\frac{-e\varphi}{kT}}$, где j_0 есть ток при положительном потенциале. При осуществлении опыта необходимо, чтобы расстояние между катодом и анодом было мало, для того чтобы количество электронов между ними не было велико и взаимное отталкивание электронов не повлияло на результат опыта.

Советский ученый академик А. Ф. Иоффе предложил использовать это явление для прямого превращения тепловой

*) Энергия, необходимая для вырывания электрона, может быть определена другими способами.

энергии в электрическую. Если электроны идут с катода на отрицательно заряженный анод, то в целом такая система является источником напряжения: во внешней цепи между отрицательно заряженным анодом и положительным катодом ток имеет такое направление, что он совершает работу. Такой способ получения электрического тока замечателен отсутствием каких бы то ни было движущихся частей, принципиальной простотой схемы. В этом отношении такой способ похож на получение электроэнергии при помощи термоэлементов, также осуществленное академиком А. Ф. Иоффе. В настоящее время во всем мире широко ведутся работы по практическому применению нового способа.

ГЛАВА VIII

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НИХ

§ 1. Основные понятия и единицы измерения

В главе VIII рассматриваются явления, происходящие в электрических цепях. Основными элементами электрической цепи являются сопротивления, емкости, индуктивности, источники тока (напряжения).

Так же как и в других частях, посвященных применению математики к физическим вопросам, наше изложение не предназначено для *замены* учебника физики, а скорее является дополнением, развитием и уточнением тех знаний, которые дает школьный учебник физики. Поэтому здесь мы только вкратце напомним определения сопротивления, емкости и т. п. и единицы их измерения, считая, что в школьном объеме основные понятия известны читателю.

Количество электричества определяется как разность количества положительных зарядов и количества отрицательных зарядов. Обозначаем его q. Пользуемся практической системой единиц, так что единицей количества электричества является *кулон* (сокращенно — *к*). Элементарный заряд — заряд протона — равен $e_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, заряд электрона равен $e_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

Сила тока (или кратко *ток*) определяется как количество электричества, протекающее в единицу времени через поперечное сечение проводника. Силу тока будем обозначать через j. В практической системе единиц за единицу силы тока принимается такая сила тока, при которой через поперечное сечение проводника за секунду протекает 1 *к*.

Эта единица носит специальное название *ампер* (сокращенно — *а*)

$$\text{ампер} = \text{кулон}/\text{секунда}.$$

Направлением тока называется направление, в котором должны были бы двигаться положительные заряды для того, чтобы создать данный ток. В действительности в металлических проводниках положительные заряды неподвижны, а ток течет благодаря движению электронов. Тело, заряженное положительно,— это, как правило, тело, которое потеряло часть своих электронов (только в редких случаях положительный заряд есть результат того, что тело приобрело положительные заряды). Отрицательно заряженное тело— это тело, которое приобрело избыточные электроны. Направление тока есть направление, *противоположное* тому направлению, в котором в проводнике движутся электроны.

Электрическим потенциалом данной точки называется потенциальная энергия, которой обладает положительный заряд в 1 *к*, помещенный в данную точку. При этом считается, что электрический потенциал земли равен нулю. Следовательно, равен нулю потенциал той точки схемы, которая соединена с землей металлическим проводом («заземлена»). Единицей потенциала в практической системе единиц служит *вольт*. Потенциал точки равен 1 вольту (1 *в*), если заряд в 1 *к*, помещенный в эту точку, обладает потенциальной энергией в 1 джоуль. Джоуль равен 10^7 *эрг*. Потенциальная энергия u заряда q, помещенного в точку, где потенциал равен φ, есть

$$u\ (\text{джоуль}) = q\ (\text{кулон}) \cdot \varphi\ (\text{вольт}). \tag{1.1}$$

При этом надо представлять себе, что q мало, так как если поместить в данную точку большой заряд (например, 1 *к*), то от этого изменится сам потенциал φ. Поэтому лучше сказать, что потенциал — это коэффициент при q в формуле (1.1).

Работа A, которую совершит поле, переводя заряд из точки, где потенциал равен φ_1, в точку, в которой потенциал равен φ_2, есть

$$A = u_1 - u_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Так же как во все физические результаты в механике входит только разность потенциальных энергий, так в учении

об электричестве в формулы входит всегда разность потенциалов. Ко всем потенциалам во всех точках можно прибавить одинаковое слагаемое,— разность потенциалов от этого не изменяется. Поэтому потенциал в какой-нибудь одной точке схемы или аппарата всегда можно выбрать произвольно, например положить равным нулю. Однако после этого потенциалы всех других точек становятся вполне определенными. Именно это обстоятельство позволило нам принять за нуль потенциал земли.

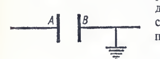


Рис. 169.

Рассмотрим конденсатор (рис. 169), состоящий из двух параллельных пластин. Одна из пластин (левая) может быть соединена с каким-либо источником напряжения. Количество электричества на левой пластине прямо пропорционально разности потенциалов пластин конденсатора φ_C

$$q = C\varphi_C,$$

причем разность потенциалов определяется как потенциал левой пластины минус потенциал правой пластины. Так как на рис. 169 правая пластина заземлена, то φ_C в этом случае равно потенциалу левой пластины.

Коэффициент пропорциональности C называется *емкостью* конденсатора. За единицу емкости принимается *фарада* (сокращенно — *ф*). Это емкость конденсатора, у которого разность потенциалов пластин 1 *в* при заряде 1 *к*. 10^{-6} *ф* называется *микрофарада*, 10^{-9} *ф* — *нанофарада*, 10^{-12} *ф* — *пикофарада*.

На правой пластине конденсатора скапливается равное по величине и противоположное по знаку количество электричества. Обозначая одну пластину конденсатора через A, другую через B, получим:

$$q_A = C\varphi_C, \quad q_B = -q_A = -C\varphi_C.$$

Электрический заряд есть сохраняющаяся величина, ни при каких процессах не возникают и не исчезают электрические заряды одного знака*). Изменение заряда пластины A ко-

*) При возникновении или исчезновении двух противоположно заряженных частиц с равным по абсолютной величине зарядом полный электрический заряд системы не изменяется.

денсатора связано с тем, что заряд с пластины уходит куда-то в другое место, например в точку D, по проволоке AD (рис. 170).

Если в направлении от D к A (слева направо) течет ток j, то за время dt через поперечное сечение проводника пройдет количество электричества jdt, поэтому

$$dq_A = jdt \quad \text{или} \quad \frac{dq_A}{dt} = j.$$

Рассмотрим теперь, от чего зависит сила тока, текущего по проводнику. По закону Ома сила тока пропорциональна

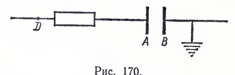


Рис. 170.

разности потенциалов на концах проводника, причем ток течет от большего потенциала к меньшему. Таким образом,

$$j = k(\varphi_D - \varphi_A). \tag{1.2}$$

Величина k положительна и называется проводимостью.

Величину $\varphi_D - \varphi_A$ обозначим через φ_R. Это есть разность потенциалов на сопротивлении R, причем величина φ_R определяется (как и φ_C) как потенциал слева минус потенциал справа.

Обратная величина $\frac{1}{k}$ называется сопротивлением проводника и обозначается через R. Единица сопротивления называется *ом*. Это сопротивление проводника, по которому течет ток в 1 *а* при разности потенциалов на концах проводника в 1 *в*. Закон Ома (1.2) можно записать так:

$$j = \frac{\varphi_R}{R} \quad \text{или} \quad \varphi_R = Rj. \tag{1.3}$$

Источником напряжения в цепи может быть, например, гальванический элемент. На полюсах элемента имеется определенная разность потенциалов. Приближенно можно считать, что эта разность потенциалов не зависит от тока, протекающего через элемент. В частности, в элементе ток может

течь в сторону от более низкого потенциала к более высокому потенциалу. Через сопротивление ток всегда течет от более высокого потенциала к более низкому, подобно тому как по трубе, соединяющей два сосуда, вода течет из сосуда, в котором уровень воды выше, в сосуд, в котором уровень воды ниже.

Элемент подобен насосу, который может забирать воду в нижнем сосуде и поднимать ее в верхний сосуд, т. е. заставлять воду передвигаться снизу вверх. Для работы насоса необходим какой-то внешний источник энергии, приводящий насос в движение. Точно так же, когда через элемент проходит ток от более низкого к более высокому потенциалу, в элементе происходят химические реакции. Энергия этих химических реакций в элементе превращается в электрическую энергию.

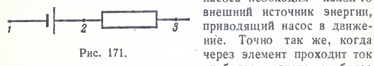


Рис. 171.

Разность потенциалов, которую дает элемент, называется электродвижущей силой или, коротко, э. д. с.

Разность потенциалов на элементе, взятая как потенциал слева минус потенциал справа (рис. 171), равна минус э. д. с. элемента

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -E.$$

В действительности э. д. с. несколько зависит от силы тока, протекающего через элемент. Когда ток течет (на рис. 171 слева направо) в направлении от более низкого потенциала к более высокому (т. е. в нормальном режиме работы элемента, когда он производит электрическую энергию), э. д. с. E уменьшается с увеличением силы тока. Приближенно можно считать э. д. с. постоянной, но более точно

$$E = a - bj. \tag{1.4}$$

Элемент, э. д. с. которого не зависит от силы тока j, будем называть идеальным элементом.

Рассмотрим последовательное соединение идеального элемента с э. д. с., равной a, и сопротивления b (рис. 171). Тогда

$$\varphi_E = \varphi_1 - \varphi_2 = -a, \quad \varphi_b = \varphi_2 - \varphi_3 = bj;$$

поэтому

$$\varphi_1 - \varphi_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) = -a + bj = -(a - bj) = -E.$$

Величину b в формуле (1.4) называют поэтому «внутреннее сопротивление» элемента: реальный элемент, с которым мы имеем дело, с э. д. с., удовлетворяющей формуле (1.4), дает такую же зависимость E от j, как соединенные последовательно идеальный элемент и сопротивление b. За величиной a сохраняют название э. д. с. реального элемента, имея в виду, что при $j = 0$ $E = a$, а падение э. д. с. при $j \neq 0$ характеризуется величиной b*).

Рис. 172.

В дальнейшем при рассмотрении электрических цепей, в которые входит источник тока, например элемент и различные сопротивления, можно представить себе, что имеем дело с идеальным элементом с постоянной, не зависящей от тока э. д. с., а внутреннее сопротивление b объединить с внешним сопротивлением R. Таким образом, реальный элемент с внутренним сопротивлением b, включенный последовательно с сопротивлением R, эквивалентен идеальному элементу, включенному последовательно с сопротивлением $R_1 = (R + b)$.

Следует еще раз обратить особое внимание на различие между сопротивлением и источником напряжения. Если в какой-то цепи на сопротивлении имеется разность потенциалов такая, что $\varphi_2 > \varphi_1$ (рис. 172), то, по нашему определению, $\varphi_R = \varphi_1 - \varphi_2 < 0$, т. е. φ_R отрицательно; следовательно, по формуле (1.3) и ток отрицателен. Значит, ток течет справа налево, от *2* к *1*. Теперь пусть разность потенциалов такого же знака имеется на концах источника напряжения, причем зависимость E от j дается формулой (1.4) (рис. 171). Пусть при этом $\varphi_3 > \varphi_1$, но $\varphi_3 - \varphi_1 < a$. Тогда $bj = \varphi_1 - \varphi_3 + a = a - (\varphi_3 - \varphi_1) > 0$, т. е. $j > 0$. Поэтому ток течет слева направо, несмотря на то, что потенциал φ_1 слева меньше, чем потенциал φ_3 справа. Таким образом, источник напряжения способен преодолевать разность напряжений и давать положительный ток (слева направо) при отрицательной

*) Так как при разомкнутой цепи ток равен нулю, то э. д. с. можно определить как разность потенциалов разомкнутого элемента.

разности потенциалов ($(\varphi_1 - \varphi_3) < 0$), если только эта отрицательная разность потенциалов по абсолютной величине не превышает э. д. с. источника. Между тем сопротивление при отрицательной разности потенциалов всегда дает отрицательный ток.

В частном случае (рис. 173), если элемент имеет внутреннее сопротивление b, а во внешней цепи последовательно включено сопротивление R, ток определяется формулой $j = \frac{E}{R+b}$.

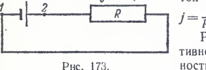


Рис. 173.

Рассмотрим теперь индуктивность. Явление индуктивности связано с магнитным полем, возникающим в пространстве, окружающем проводник, когда по проводнику течет ток. Это магнитное поле особенно велико, если проводник имеет вид катушки с большим числом витков. Поле еще больше увеличивается, если катушка намотана на железный сердечник.

В свою очередь магнитное поле вызывает электрические явления. Известно, что каждый виток (и даже каждая часть витка) катушки при наличии переменного магнитного поля становится источником напряжения, становится подобным гальваническому элементу. В катушке, в которой витки намотаны так, что ток обходит сердечник катушки в одном и том же направлении на всем протяжении катушки, все эти источники напряжения соединены последовательно, так что напряжения складываются.

В целом катушка эквивалентна источнику напряжения с разностью потенциалов, пропорциональной скорости изменения магнитного поля. Но магнитное поле в катушке пропорционально силе тока в катушке *). Поэтому скорость изменения магнитного поля пропорциональна скорости изменения

---

*) Мы не будем рассматривать случай, когда на одном сердечнике намотаны две катушки, т. е. трансформатор, связывающий между собой две электрические цепи, в которых текут разные токи.

Не рассматриваются также случаи более сложной зависимости магнитного поля от тока, когда в катушку вставлен железный сердечник и сила тока так велика, что железо «насыщается».

тока, т. е. производной $\frac{dj}{dt}$. Окончательно в катушке (рис. 174)

$$\varphi_L = \varphi_1 - \varphi_2 = L\frac{dj}{dt}, \tag{1.5}$$

причем за положительное направление тока принято направление от 1 к 2 внутри катушки, а величина φ_L есть разность потенциалов на катушке. Она определяется как потенциал φ_1 слева минус потенциал φ_2 справа. Рассматривая подробно направление магнитного поля и э. д. с., индуцируемую при его изменении, можно доказать, что коэффициент L в этой формуле (так называемая индуктивность) всегда положителен.

Рис. 174.

Из формулы (1.5) следует, что если $\frac{dj}{dt} < 0$, то $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$, т. е. $\varphi_2 > \varphi_1$. Таким образом, если ток положителен (течет от 1 к 2) и по величине уменьшается, то катушка играет роль элемента, поддерживающего в цепи положительный ток, несмотря на то, что $\varphi_L < 0$. Если же ток положителен и увеличивается, то $\frac{dj}{dt} > 0$, поэтому $\varphi_L > 0$. В этом случае катушка играет роль добавочного сопротивления, так как в этом случае на катушке разность потенциалов положительна при положительном токе [сравните с (1.3)].

Существенное отличие катушки от источника напряжения и от сопротивления заключается в том, что величина φ_L зависит не от величины тока j, а от скорости его изменения $\frac{dj}{dt}$.

Коэффициент L в уравнении носит название «индуктивность катушки» (раньше употреблялось выражение «самоиндукция»).

Единица индуктивности называется *генри*. Если индуктивность катушки равна 1 *генри*, то это значит, что при скорости изменения тока, равной 1 *а/сек*, в катушке возникает разность потенциалов в 1 *в*. Размерность индуктивности получаем из формулы (1.5)

$$\text{генри} = \frac{\text{вольт}\cdot\text{секунда}}{\text{ампер}}.$$

Часто для краткости говорят просто «индуктивность L», вместо того чтобы сказать «катушка, индуктивность которой равна L». Говорят также «емкость C» вместо «конденсатор, емкость которого равна C». Точно так же говорят об э. д. с. E_0, вместо того чтобы говорить о гальваническом элементе или источнике напряжения.

Из сказанного видно, что индуктивность влияет на ток в цепи, подобно тому как инертная масса (маховик) влияет на скорость движения: индуктивность препятствует изменению тока, масса — по второму закону Ньютона — препятствует изменению скорости. Подробнее это сходство будет рассмотрено в § 4 этой главы.

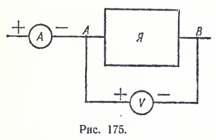


Рис. 175.

С точки зрения дальнейших расчетов емкость, сопротивление, э. д. с. и индуктивность имеют между собой общее свойство — в схеме все они присоединяются двумя проводами (в отличие, например, от трансформатора, имеющего четыре вывода, или радиолампы, имеющей три вывода — анод, катод, управляющая сетка). Приборы, которые включены в схему при помощи двух проводов, носят название двухполюсников. Приборы, включаемые при помощи четырех проводов, называются четырехполюсниками. В схеме каждый элемент — емкость, сопротивление, э. д. с. и индуктивность — характеризуются в каждый данный момент времени определенным током, который проходит через этот элемент, и определенной разностью потенциалов на входе и выходе.

Можно представить себе закрытый ящик $Я$ (рис. 175) с двумя торчащими из него проводами A и B. Внутри ящика может быть что угодно: R, E, L, C. Подключим к ящику амперметр A и вольтметр V. При включении, показанном на рис. 175 (значки «+» и «—» соответствуют надписям на клеммах амперметра и вольтметра), амперметр показывает ток j, идущий в направлении от A к B. Вольтметр показывает разность потенциалов

$$\varphi_Я = \varphi_A - \varphi_B.$$

От того, что находится внутри ящика, зависит связь между $\varphi_Я$ и j:

в случае сопротивления $\varphi_Я = Rj$, (1.6)

в случае э. д. с. *) E_0 $\quad \varphi_Я = -E_0$, (1.7)

в случае индуктивности L $\varphi_Я = L\dfrac{dj}{dt}$, (1.8)

в случае емкости **) C $\quad \varphi_Я = (\varphi_Я)_0 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} j\,dt$ (1.9)

$$\left(\text{или } \frac{d\varphi_Я}{dt} = \frac{1}{C}j\right). \qquad (1.9а)$$

В некоторых случаях осуществляются и более сложные зависимости. Так, например, выпрямитель тока (двухэлектродная лампа или полупроводниковый диод) не подходит ни под одну из формул (1.6)—(1.9). Однако в большом числе важных вопросов можно ограничиться рассмотрением элементов схем, для которых с хорошей точностью выполняются формулы (1.6)—(1.9). Ниже будем рассматривать именно такие схемы, кроме последнего § 16, где специально рассматриваются свойства контура, в который включено устройство со сложной зависимостью тока от разности потенциалов.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 176. Выпишем падение напряжения на отдельных элементах схемы:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_C = \varphi_{A_C} - \varphi_{B_C}, \quad \varphi_L = \varphi_{A_L} - \varphi_{B_L}, \\ &\varphi_R = \varphi_{A_R} - \varphi_{B_R}, \quad \varphi_E = \varphi_{A_E} - \varphi_{B_E}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

Заметим еще, что $\varphi_{B_C} = \varphi_{A_R}$, $\varphi_{B_R} = \varphi_{A_L}$, $\varphi_{B_L} = \varphi_{A_E}$; поэтому, сложив почленно все равенства (1.10), получим:

$$\varphi_C + \varphi_R + \varphi_L + \varphi_E = \varphi_{A_C} - \varphi_{B_E}.$$

*) Внутреннее сопротивление э. д. с. не учитываем.

**) $q_A = C\varphi_Я$, $\dfrac{dq_A}{dt} = j$, откуда $\dfrac{d\varphi_Я}{dt} = \dfrac{1}{C}j$. Если в начальный момент времени $t = t_0$, $\varphi_Я = (\varphi_Я)_0$, то $\varphi_Я = (\varphi_Я)_0 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} j\,dt$.

Если цепь рис. 176 замкнута, то $\varphi_{A_C} = \varphi_{B_E}$. В этом случае, следовательно,

$$\varphi_C + \varphi_R + \varphi_L + \varphi_E = 0. \qquad (1.11)$$

Это общее равенство вместе с выражениями (1.6)—(1.9)

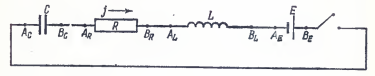


Рис. 176.

полностью определяет все процессы в цепи. Ниже будем, пользуясь этим равенством, рассматривать различные цепи, начиная с самых простых, состоящих только из двух элементов.

§ 2. Разряд емкости через сопротивление

Рассмотрим процесс, происходящий в цепи из емкости C и сопротивления R (рис. 177). Потенциал точки A обозначим φ (противоположная пластина пусть заземлена). Вначале пусть $\varphi = \varphi_0$. Соответствующее количество электричества на пластине A, $q_A = C\varphi_0$.

Можно ли говорить о токе, идущем через ёмкость? В конденсаторе две пластины разделены изолятором (например, воздухом), так что в действительности электрон не может пройти через емкость, т. е. попасть из A в B. Однако если на пластину A попадает положительный заряд, то пластина B заряжается отрицательно, так что с пластины B по проводу уходит положительный заряд (ток также идет слева направо).

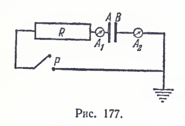


Рис. 177.

Два амперметра A_1 и A_2, один из которых измеряет силу тока в проводе, присоединенном к пластине A, другой — в проводе, присоединенном к пластине B, дают одинаковые показания.

Что именно, положительные заряды или электроны, проходят в различных частях электрической цепи, нас не интересует, так же как не интересует, пройдут ли через A_2 те же самые электроны, которые ранее прошли через A_1, или другие. Поэтому везде в дальнейшем будем говорить просто о токе, идущем через конденсатор, имея при этом в виду ток, проходящий по проводам, присоединенным к пластинам конденсатора. В электрической цепи о токе, идущем через конденсатор, можно говорить так же, как о токе, идущем через сопротивление или индуктивность; отличие заключается в другом виде связи между током и разностью потенциалов, что выражено формулами (1.9) и (1.9а).

При замыкании рубильника P (рис. 177) по сопротивлению R пойдет ток

$$j=\frac{1}{R}\varphi_R.$$

По формуле (1.11) $\varphi+\varphi_R=0$, откуда $\varphi_R=-\varphi$, поэтому

$$j=-\frac{1}{R}\varphi. \qquad (2.1)$$

Так как положительным мы называем ток, текущий слева направо, то при $\varphi>0$, как видно из формулы (2.1), ток отрицателен, течет справа налево, конденсатор разряжается *). Вспоминая, что $j=\frac{dq}{dt}$ (ток через конденсатор), а $q=C\varphi$, находим:

$$j=C\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2.2)$$

Сравнивая (2.1) и (2.2), находим:

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{1}{RC}\varphi. \qquad (2.3)$$

Такое уравнение мы решали в связи с задачей о радиоактивном распаде. Если при $t=0$ $\varphi=\varphi_0$, то

$$\varphi(t)=\varphi_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (2.4)$$

*) Заметим, что во всех схемах (рис. 176 и далее), имеющих вид прямоугольника, мы говорим о направлении тока в *верхней* стороне прямоугольника; в нижней стороне, замыкающей цепь, ток имеет, очевидно, противоположное направление.

Отсюда

$$j(t) = -\frac{\varphi_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Из формулы (2.3) видно, что величина RC имеет размерность времени. Проверим это:

$$[R] = \text{ом} = \frac{\text{вольт}}{\text{ампер}} = \frac{\text{вольт} \cdot \text{секунда}}{\text{кулон}}; \quad [C] = \frac{\text{кулон}}{\text{вольт}}.$$

Отсюда

$$[RC] = \frac{\text{вольт} \cdot \text{секунда}}{\text{кулон}} \cdot \frac{\text{кулон}}{\text{вольт}} = \text{секунда}.$$

За время $t = RC$ заряд конденсатора q, а также сила тока j уменьшаются в e раз.

Процесс разряда конденсатора легко проследить на опыте. В магазинах радиодеталей продаются конденсаторы с емкостью $C = 20$ *микрофарад* $= 20 \cdot 10^{-6}$ *ф* и сопротивления

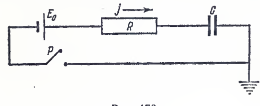


Рис. 178.

$R = 20$ *мегом* $= 20 \cdot 10^6$ *ом*. Для схемы с такими R и C получим $RC = 400$ *сек*, очень удобное для наблюдения время.

Величина RC называется *постоянной времени* контура, состоящего из емкости и сопротивления (напомним, что в случае радиоактивного распада аналогичная величина называлась средним временем жизни).

Рассмотрим задачу зарядки емкости через сопротивление. Схема показана на рис. 178. Если рубильник P замкнут, то согласно (1.11) $\varphi_E + \varphi_R + \varphi = 0$, где φ — потенциал незаземленной пластины конденсатора. Так как $\varphi_E = -E_0$, $\varphi_R = Rj$, то $-E_0 + Rj + \varphi = 0$. Ток через конденсатор $j = \frac{dq}{dt} = C\frac{d\varphi}{dt}$, поэтому

$$-E_0 + RC\frac{d\varphi}{dt} + \varphi = 0$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{RC}(\varphi - E_0). \tag{2.5}$$

Для того чтобы найти, как меняется φ с течением времени, удобно ввести новую переменную z по формуле $z = \varphi - E_0$; тогда $dz = d\varphi$. Уравнение (2.5) перепишется в виде

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{z}{RC}.$$

Его решение есть

$$z = z_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{2.6}$$

где z_0 — значение z в начальный момент времени.

Найдем решение для случая, когда в начальный момент времени конденсатор не заряжен, при $t = 0$ $\varphi = 0$. Тогда $z_0 = -E_0$. Из (2.6) получаем $z = -E_0 e^{-\frac{t}{RC}}$,

$$\varphi = z + E_0 = -E_0 e^{-\frac{t}{RC}} + E_0 = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \tag{2.7}$$

График зависимости φ от t изображен на рис. 179. Кривая соответствует формуле (2.7), пунктирная горизонтальная прямая представляет собой то значение $\varphi = E_0$, к которому с течением времени приближается решение. Величина z имеет геометрический смысл расстояния по вертикали от кривой до пунктирной линии. Это расстояние с течением времени убывает по показательному закону.

Рис. 179.

За время, равное RC, заряд конденсатора достигает 63% своего конечного значения, за время $2RC$ — 86% и за время $3RC$ — 95% конечного значения.

Из формул (2.4) и (2.7) видно, что разрядка и зарядка конденсатора происходят тем быстрее, чем меньше сопротивление R.

Упражнения

1. В схеме рис. 177 $C=10^{-6}$ *ф*, $R=10^7$ *ом*, $R=10^8$ *ом*, $R=10^9$ *ом*. Для каждого из этих случаев определить, через сколько времени ток, текущий в начальный момент через конденсатор, уменьшится на 10%; уменьшится вдвое.

2. Рассмотреть процесс выравнивания потенциала через сопротивление R при последовательном соединении двух конденсаторов C_1 и C_2, один из которых в начальный момент $t=0$ заряжен до разности потенциалов $\varphi_{C_1}(0)=a$, а другой не заряжен вовсе, т. е. $\varphi_{C_2}(0)=0$ (рис. 180).

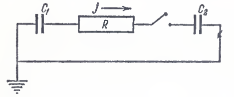


Рис. 180.

3. Определить изменение постоянной времени контура в схеме рис. 177, если все линейные размеры схемы увеличить в n раз (конденсатор считать плоским).

Замечание 1. Условие задачи надо понимать так: увеличиваются как размеры конденсатора, так и размеры сопротивления, но материалы, из которых изготовлены конденсатор и сопротивление, не меняются.

Замечание 2. Из физики известна формула для емкости плоского конденсатора $C=\varepsilon S/4\pi d$, где S — площадь пластины конденсатора, d — расстояние между пластинами, ε — постоянная величина, зависящая от материала между пластинами (диэлектрическая постоянная). Величина проволочного сопротивления находится по формуле $R=\rho\frac{l}{\sigma}$, где l — длина, σ — площадь поперечного сечения, ρ — постоянная, зависящая от материала проволоки.

§ 3. Колебания в цепи емкости с искровым промежутком

Типичная схема использования конденсатора показана на рис. 181. В цепь включен источник напряжения с э. д. с. E и сопротивлением R (роль R может играть внутреннее сопротивление источника напряжения). Ниже находится искровой промежуток; при разности потенциалов меньше определенного значения φ_1 искровой промежуток является изолятором. При $\varphi=\varphi_1$ проскакивает искра, между проводами воздух нака-

ляется до высокой температуры и становится хорошим проводником. Суммарное сопротивление подводящих проводов и накаленного воздуха обозначим через r. Величина r мала и остается малой до тех пор, пока идет ток, поддерживающий

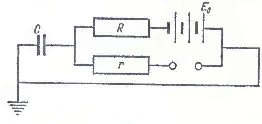


Рис. 181.

высокую температуру воздуха. При определенном малом значении тока j_2 воздух остывает и искровой промежуток снова становится изолятором. Этому значению тока соответствует разность потенциалов $\varphi_2 = j_2 r$. При этом $\varphi_1 > \varphi_2$: нужно большее напряжение для того, чтобы зажечь искру, чем для того, чтобы поддерживать ее горение.

Рис. 182.

На рис. 182 показана зависимость φ от t для такой схемы. На участке OA происходит зарядка емкости, ток не идет через искровой промежуток. В этом случае справедлива формула (2.6)

$$\varphi = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \tag{3.1}$$

В точке A в момент времени $t = t_A$ разность потенциалов достигает значения φ_1, искровой промежуток начинает проводить ток, идет разрядка конденсатора. Так как при этом $R \gg r$, то током, идущим от источника напряжения, можно пренебречь по сравнению с током, идущим через искровой промежуток. Поэтому для φ получаем уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varphi}{rC},$$

причем при $t=t_A$ $\varphi=\varphi_1$. Отсюда находим:

$$\varphi=\varphi_1 e^{-\frac{(t-t_A)}{rC}}. \qquad (3.2)$$

В момент времени $t=t_B$ (в точке B) $\varphi=\varphi_2$, при этом искровой промежуток опять становится изолятором, снова начинается зарядка (участок BC).

Определим время t_B-t_A, в течение которого происходила разрядка емкости. Для этого воспользуемся тем, что при $t=t_B$ $\varphi=\varphi_2$. Полагая в (3.2) $\varphi=\varphi_2$, $t=t_B$, получим:

$$\varphi_2=\varphi_1 e^{-\frac{t_B-t_A}{rC}},$$

откуда

$$t_B-t_A=rC\ln\frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

На участке BC (зарядка) справедлива зависимость (3.1), сдвинутая по времени на величину τ (на рис. 182 величина τ изображается отрезком A_0B). Поэтому

$$\varphi=E\left(1-e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\right).$$

Полагая здесь $t=t_B$, получим:

$$\varphi_2=E\left(1-e^{-\frac{t_B-\tau}{RC}}\right).$$

Аналогично, полагая $t=t_C$, находим:

$$\varphi_1=E\left(1-e^{-\frac{t_C-\tau}{RC}}\right).$$

Из последних двух формул

$$\frac{E-\varphi_2}{E-\varphi_1}=e^{\frac{t_C-t_B}{RC}} \quad \text{или} \quad t_C-t_B=RC\ln\frac{E-\varphi_2}{E-\varphi_1}.$$

Полный период процесса (зарядка — разрядка) есть

$$T=t_C-t_A=(t_C-t_B)+(t_B-t_A)=RC\ln\frac{E-\varphi_2}{E-\varphi_1}+rC\ln\frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Обычно сопротивление в цепи источника напряжения R во много раз больше сопротивления искрового промежутка, поэтому время зарядки гораздо больше времени разряда. Зато

ток разрядки оказывается во много раз больше, чем ток зарядки, больше, чем тот максимальный ток, который можно было бы получить от источника напряжения (при наличии внутреннего сопротивления R_1 источник напряжения не дает ток больше чем $\frac{E}{R_1}$). Схема (рис. 181) преобразует длительный малый ток, вызываемый источником напряжения, в сильный ток, который, однако, течет не все время, а в течение кратких промежутков времени (как принято говорить «короткие импульсы» тока).

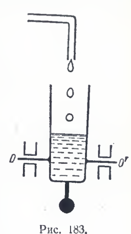


Рис. 183.

Действие схемы подобно системе, в которой маленькая струйка воды постепенно наполняет сосуд (рис. 183). Сосуд закреплен так, что когда накопится достаточное количество воды, то он опрокидывается, вода выливается, после чего сосуд снова принимает вертикальное положение, и процесс начинается сначала. На рисунке сосуд закреплен на горизонтальной оси OO' ниже середины. Внизу к сосуду прикреплен груз, так что центр тяжести пустого сосуда лежит ниже оси. Однако когда сосуд заполняется водой, то центр тяжести полного сосуда оказывается выше оси и сосуд опрокидывается.

Вернемся к схемам рис. 177 и 178. В таких схемах, состоящих из емкостей, сопротивлений и э. д. с., по истечении некоторого промежутка времени потенциалы практически выравниваются. Действительно, в схеме рис. 177 устанавливается $\varphi = 0$, в схеме рис. 178 $\varphi = E_0$ [см. формулы (2.4) и (2.7)]. Совершенно другую картину наблюдаем в случае схемы с искровым промежутком. Здесь происходят незатухающие колебания величины φ (правда, они очень непохожи на те колебания, которые мы изучали раньше). Эти колебания связаны с особыми свойствами искрового промежутка, в частности с тем фактом, что до достижения определенного потенциала (так называемого потенциала пробоя φ_1) ток через искровой промежуток совсем не идет.

О свойствах разряда через воздух в искровом промежутке написаны большие книги; мы привели только минимум сведений,

необходимых для понимания действия схемы рис. 181. Сведения, которые мы дали, недостаточны для ответа на простой вопрос: что произойдет, если соединить искровой промежуток с источником напряжения без конденсатора?

Действительно, если ток не идет, то на искровом промежутке будет напряжение E_0. Так как $E_0 > \varphi_1$, то должен произойти пробой. Но если бы произошел пробой, то сопротивление искрового промежутка стало бы малым, равным r. Тогда на искровом промежутке возникла бы разность потенциалов, равная $E_0 \cdot \frac{r}{r+R}$, и ток $j = \frac{E_0}{r+R}$. Если R велико, то ток j мал — меньше j_2, разность потенциалов на искровом промежутке мала — меньше φ_2. Но в таком случае воздух не нагревается и сопротивление искрового промежутка не станет малой величиной r, а значит, разность потенциалов будет велика, равна E. Мы получили противоречие.

На самом деле в этих условиях получается электрический разряд другого типа, так называемый тлеющий разряд (малый ток без нагрева воздуха), а не искра с накаленным воздухом.

§ 4. Энергия конденсатора

Заряженный конденсатор обладает определенным запасом энергии; этот запас энергии может быть отдан очень быстро, если конденсатор разряжается на малое сопротивление.

Найдем запас энергии конденсатора емкости C, одна пластина которого заземлена, а другая имеет потенциал φ_0. Тогда количество электричества $q_0 = C\varphi_0$.

На первый взгляд энергия равна произведению $q_0\varphi_0$. В действительности это выражение хотя по порядку величины и правильно, но не точно; оно вдвое отличается от истинного. Рассмотрим процесс зарядки конденсатора. В момент, когда его потенциал равен φ, а заряд q, добавка малого количества электричества dq увеличивает энергию на

$$dW = \varphi dq. \tag{4.1}$$

Существенно то, что по мере зарядки сам потенциал φ меняется, так как $\varphi = \frac{1}{C} q$. Подставляя это значение φ в (4.1), получим:

$$dW = \frac{1}{C} q\, dq. \tag{4.2}$$

Проинтегрируем (4.2) от $q=0$ (незаряженный конденсатор) до $q=q_0$; получим:

$$W(q_0)=\frac{1}{C}\int_0^{q_0} q\,dq=\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}=\frac{1}{2}\varphi_0 q_0=\frac{1}{2}C\varphi_0^2. \qquad (4.3)$$

Таким образом, точный расчет дает коэффициент $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора от источника напряжения через сопротивление (см. § 2, схема рис. 178). Источник напряжения имеет постоянную э. д. с. E_0. Поэтому, когда протекает количество электричества dq, источник напряжения совершает работу $E_0 dq$ (эта работа совершается за счет соответствующего уменьшения химической энергии источника напряжения). Следовательно, полная работа, совершаемая источником напряжения, равна $E_0 q_0$, где q_0 — полное протекшее количество электричества. При зарядке конденсатора процесс заканчивается, когда станет $\varphi=E_0$. При этом источник напряжения произведет работу

$$E_0 q_0 = E_0 C E_0 = C E_0^2.$$

Каким запасом энергии будет обладать конденсатор? Это легко подсчитать по формуле (4.3)

$$W=\frac{1}{2}CE_0^2.$$

Куда же делась половина работы, совершенной источником? Покажем, что она пошла на нагревание сопротивления R. Для этого вспомним, что если через сопротивление протекло количество электричества dq, то при этом выделилась энергия

$$dA=\varphi_R\,dq, \qquad (4.4)$$

где φ_R — разность потенциалов на концах сопротивления. Пользуясь тем, что $dq=j\,dt$, $j=\frac{\varphi_R}{R}$, можем (4.4) преобразовать к хорошо известному виду

$$dA=\frac{(\varphi_R)^2}{R}\,dt=j^2R\,dt.$$

Величина $j^2R=\frac{(\varphi_R)^2}{R}$ представляет собой количество энергии,

выделяющейся на сопротивлении в единицу времени, т. е. тепловую мощность.

Зависимость $j(t)$ в случае зарядки конденсатора через сопротивление была найдена в § 2

$$j(t)=\frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Поэтому

$$dA=\frac{E_0^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}dt.$$

Энергия, выделившаяся за время t, есть

$$A(t)=\frac{E_0^2}{R}\int_0^t e^{-\frac{2t}{RC}}dt.$$

Отсюда

$$A(t)=-\frac{CE_0^2}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^t=\frac{1}{2}CE_0^2\left(1-e^{-\frac{2t}{RC}}\right). \qquad (4.5)$$

Мы знаем, что при неограниченном возрастании величины промежутка времени t потенциал φ неограниченно приближается к значению E_0. При этом, как видно из (4.5), величина A неограниченно приближается к $\frac{1}{2}CE_0^2$. Поэтому полная энергия, выделившаяся на сопротивлении,

$$A=\frac{1}{2}CE_0^2. \qquad (4.6)$$

Таким образом, расчет подтверждает, что при зарядке конденсатора половина энергии теряется на сопротивлении. Коэффициент полезного действия зарядки всего 50%. Заметим, что если прямо присоединить провод от источника напряжения к конденсатору, то ничего не изменится, все равно к. п. д. будет 50%, роль сопротивления R возьмет на себя внутреннее сопротивление источника напряжения, который будет при этом нагреваться. Из формулы (4.6) видно, что энергия, бесполезно теряемая на сопротивлении при зарядке конденсатора, не зависит от величины сопротивления R, а следовательно, не зависит от того, насколько быстро происходит зарядка.

Поскольку величина R не вошла в (4.6), то эту формулу можно получить, не вводя R в промежуточные преобразования. Действительно, для схемы рис. 178 $\varphi_E+\varphi_R+\varphi_C=0$, откуда $\varphi_R=-\varphi_E-\varphi_C=E_0-\frac{q}{C}$. Поэтому $dA=\left(E_0-\frac{q}{C}\right)dq$. Интегрируя это выражение от $q=0$ до $q=q_0=E_0C$, получим:

$$A=\frac{1}{2}CE_0^2.$$

Последний вывод справедлив и для случая, когда сопротивление R меняется со временем. Предыдущий же вывод был

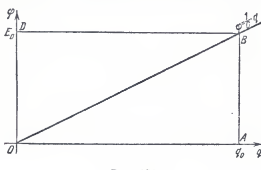


Рис. 184

справедлив лишь для $R=\text{const}$, так как только в этом случае можно применять формулы § 2.

Для того чтобы уменьшить потери при зарядке емкости, нужно было бы поступать так: сначала взять источник напряжения с малой э. д. с. E_1 и зарядить конденсатор до потенциала E_1, затем первый источник напряжения отключить и присоединить второй источник с большей э. д. с. E_2. Зарядив емкость до потенциала E_2, отключить второй источник и подключить третий с э. д. с. E_3, и т. д. Выигрыш, который при этом получается, легко видеть графически: будем по оси абсцисс откладывать заряд конденсатора q, по оси ординат — его потенциал φ. Они связаны зависимостью $\varphi=\frac{1}{C}q$, которая изображается прямой (рис. 184). Энергия конденсатора равна площади треугольника OAB. Работа, произведенная источником напряжения, равна пло-

щади прямоугольника $OABD$. Энергия, потерянная на сопротивлении, равна площади треугольника ODB. В случае зарядки конденсатора в несколько приемов сумма работ всех источников напряжения равна площади, заштрихованной на

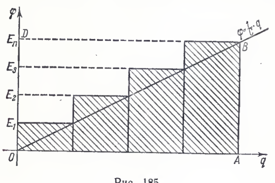


Рис. 185.

рис. 185. Предлагаем читателю найти коэффициент полезного действия для случая, когда процесс зарядки разбит на n этапов:

$$E_1 = \frac{\varphi}{n}, \quad E_2 = \frac{2\varphi}{n}, \quad E_3 = \frac{3\varphi}{n}, \quad \ldots, \quad E_n = \varphi.$$

Выше рассматривался конденсатор, одна пластина которого была заземлена, находилась при потенциале $\varphi_1 = 0$. При этом энергия конденсатора зависит от потенциала второй пластины φ_2 $W = \frac{1}{2} C\varphi_2^2$. Если ни одна из пластин не заземлена, то энергия конденсатора зависит от разности потенциалов на пластинках φ_C

$$W = \frac{1}{2} C\varphi_C^2.$$

Действительно, мы знаем, что заряд q на каждой пластине конденсатора зависит от разности потенциалов, при этом заряды на пластинах равны по величине и противоположны по знаку

$$q_A = C\varphi_C, \quad q_B = -C\varphi_C = -q_A, \quad dq_A = -dq_B.$$

При расчете изменения энергии в процессе зарядки надо учесть изменение заряда обеих пластин. Пусть потенциал пластины A равен φ_1, потенциал пластины B равен φ_2, $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_C$. Тогда

$$dW = \varphi_1 \, dq_A + \varphi_2 \, dq_B = \varphi_1 \, dq_A - \varphi_2 \, dq_A = (\varphi_1 - \varphi_2) \, dq_A = \varphi_C \, dq_A.$$

Так как $\varphi_C = \frac{q_A}{C}$, то

$$dW = \frac{1}{C} q_A \, dq_A. \qquad (4.7)$$

Интегрируя (4.7) от 0 до q_A, получим:

$$W = \frac{q_A^2}{2C} = \frac{1}{2} C\varphi_C^2.$$

Зная выражение энергии заряженного конденсатора в зависимости от емкости, можно найти механические силы, действующие между пластинами конденсатора. Представим себе, что пластины конденсатора соединены механически с каким-то рычагом и емкость C зависит от положения рычага. Если положение рычага характеризуется значением координаты x, то емкость есть $C(x)$. При определенном положении рычага x_0 емкость конденсатора $C(x_0) = C_0$. Если в этом положении конденсатор заряжен до потенциала φ_0, то заряд на пластинах $q_0 = C_0\varphi_0$, энергия конденсатора

$$W = \frac{C_0 \varphi_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C_0}.$$

Отсоединим конденсатор от источника напряжения и будем передвигать рычаг. Тогда заряд сохраняется постоянным (потенциал меняется обратно пропорционально емкости), энергия меняется

$$W(x) = \frac{q_0^2}{2C(x)}.$$

Электрическая энергия заряженного конденсатора подобна упругой энергии пружины. Увеличение $W(x)$ происходит в том случае, если внешняя сила, приложенная к рычагу, совершает работу. При этом внешняя сила преодолевает силы, действующие на рычаг со стороны пластин конденсатора. Напротив, при уменьшении $W(x)$ рычаг передви-

гается, совершая работу против внешних приложенных сил. Можно сделать вывод, что сила, действующая на рычаг со стороны пластин конденсатора, равна

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{q_0^2}{2C(x)}\right) = \frac{q_0^2}{2[C(x)]^2}\cdot\frac{dC(x)}{dx} = \frac{\varphi^2(x)}{2}\frac{dC(x)}{dx}. \quad (4.8)$$

Сила направлена в сторону увеличения емкости. Так, например, если конденсатор состоит из двух равных параллельных пластин, то емкость обратно пропорциональна расстоянию между пластинами. Значит, емкость увеличивается при сближении пластин. Действительно, при заряженном конденсаторе на пластинах находятся заряды противоположных знаков, и пластины притягивают друг друга тем сильнее, чем меньше расстояние между ними.

Формула (4.8) позволяет найти силу и в более сложных случаях, например в случае переменного конденсатора, в котором одна пластина может перемещаться в зазоре между двумя неподвижными.

Важно обратить внимание на то, что производную $\frac{dW}{dx}$ мы брали при заданном постоянном заряде q. Однако *нельзя* при нахождении силы по формуле $F = -\frac{dW}{dx}$ брать производную от $W = \frac{C(x)\varphi^2}{2}$, считая φ постоянным и учитывая только, что C зависит от x. При этом мы получили бы неправильный знак силы. Действительно, если конденсатор отсоединен от источника напряжения, то φ непостоянно, $\varphi = \frac{q}{C}$, $C = C(x)$. Если конденсатор присоединен к источнику напряжения, то при изменении емкости φ остается постоянным. Однако при этом меняется заряд q, значит, через источник напряжения течет ток, т. е. источник напряжения совершает (при увеличении C) работу, равную $\varphi\, dq$. Следовательно, при постоянном φ при изменении емкости, применяя закон сохранения энергии, надо учитывать не только изменение энергии конденсатора и работу силы, но и работу, совершаемую источником напряжения.

§ 5. Цепь с индуктивностью

Рассмотрим цепь, состоящую из сопротивления R и индуктивности L (рис. 186). По формуле (1.11)

$$\varphi_R + \varphi_L = 0. \tag{5.1}$$

Так как $\varphi_R = Rj$, а $\varphi_L = L\frac{dj}{dt}$, то, пользуясь (5.1), находим:

$$Rj + L\frac{dj}{dt} = 0.$$

Таким образом, ток в цепи (рис. 186) удовлетворяет уравнению

$$\frac{dj}{dt} = -\frac{R}{L}j. \tag{5.2}$$

Решение этого уравнения

$$j(t) = j_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{5.3}$$

Таким образом, в цепи (рис. 186) сила тока уменьшается по показательному закону. Уменьшение силы тока в e раз происходит за время

$$T = \frac{L}{R}.$$

Проверим размерность величины $\frac{L}{R}$. L измеряется в генри, т. е. в $\frac{\text{вольт}\cdot\text{секунда}}{\text{ампер}}$, R — в омах, т. е. в $\frac{\text{вольт}}{\text{ампер}}$. Поэтому размерность $\frac{L}{R}$ есть $\frac{\text{вольт}\cdot\text{секунда}}{\text{ампер}} : \frac{\text{вольт}}{\text{ампер}} =$ секунда, так что действительно $\frac{L}{R}$ имеет размерность времени. Величину $\frac{L}{R}$ будем называть временем нарастания. В схеме рис. 186, в которой нет источника напряжения, ток с течением времени стремится к нулю. Вопрос о том, как в такой схеме создать начальное значение тока j_0, рассмотрим немного позже.

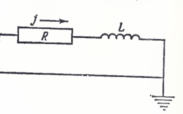


Рис. 186.

Сейчас рассмотрим схему, состоящую из источника с э. д. с., равной E_0, сопротивления R и индуктивности L (рис. 187). Из условия

$$\varphi_E + \varphi_R + \varphi_L = 0,$$

вспоминая, что $\varphi_E = -E_0$, находим:

$$-E_0 + Rj + L\frac{dj}{dt} = 0. \tag{5.4}$$

Перепишем это уравнение так:

$$\frac{dj}{dt} = \frac{R}{L}\left(\frac{E_0}{R} - j\right).$$

Это уравнение аналогично уравнению (2.5) из § 2 и решается точно таким же приемом. Получаем:

$$j(t) = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{Rt}{L}}, \tag{5.5}$$

где значение A определяется из начального условия. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ замкнули рубильник, размыкающий цепь до этого момента. При этом $j(0) = 0$, потому что при разомкнутом рубильнике ток по цепи не шел. При таком условии находим $A = -\frac{E_0}{R}$ и (5.5) принимает вид

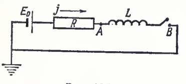


Рис. 187.

$$j = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right). \tag{5.6}$$

С течением времени ток приближается к значению

$$j(\infty) = \frac{E_0}{R}. \tag{5.7}$$

Это значение тока не зависит от индуктивности L и просто получается из закона Ома в цепи с э.д.с. E_0 и сопротивлением R. Однако такое значение тока устанавливается не сразу, а постепенно, и от индуктивности L зависит *время* установления тока: через время $\frac{L}{R}$ ток равен

$0{,}63\ j(\infty)$, через время $2\frac{L}{R}$ ток равен $0{,}86\ j(\infty)$, через время $3\frac{L}{R}$ ток равен $0{,}95\ j(\infty)$ и т. д. (рис. 188).

Согласно основному уравнению (5.4) сумма разности потенциалов на сопротивлении Rj и на индуктивности $L\frac{dj}{dt}$ равна э.д.с. E_0. Интересно проследить за каждым членом в отдельности. Они показаны на рис. 189. В начальный момент $j=0$, $Rj=0$, $E_0=L\frac{dj}{dt}$; как говорят, «напряжение целиком садится на индуктивность». С течением времени ток приближается к постоянному значению, $\frac{dj}{dt}$ стремится к нулю, «напряжение садится на сопротивление».

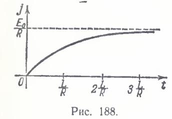


Рис. 188.

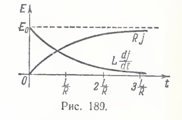


Рис. 189.

Интересно сопоставить решения, даваемые формулой (5.6) для одинакового E_0 и разных R и L. Пусть R_1 мало, R_2 велико, L_1 мало, L_2 велико. При разных комбинациях R и L получим четыре кривые зависимости тока от времени, показанные на рис. 190. Конечный ток $j(\infty)$ зависит

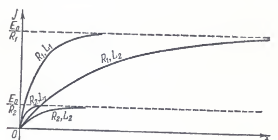


Рис. 190.

только от R, он одинаков для R_1, L_1 и для R_1, L_2; $j(\infty)$ одинаков также для пары кривых R_2, L_1 и R_2, L_2. Начальная скорость нарастания тока зависит только от индуктивности L и не зависит от сопротивления.

Из соображений размерности очевидно, что установившийся ток пропорционален начальной скорости нарастания тока и времени нарастания. При нашем определении

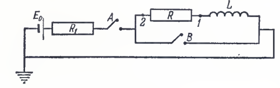


Рис. 191.

времени нарастания получается правильная формула, без каких-либо добавочных коэффициентов. Действительно, начальная скорость нарастания тока $\left.\frac{dj}{dt}\right|_{t=0}$ равна $\frac{E_0}{L}$, время нарастания $T=\frac{L}{R}$, откуда и получается установившийся ток

$$j(\infty)=T\left.\frac{dj}{dt}\right|_0=\frac{L}{R}\,\frac{E_0}{R}=\frac{E_0}{R}.$$

Как осуществить начальный ток j_0 в схеме, с рассмотрения которой мы начали (рис. 186)? Для этого можно взять схему рис. 191. Сначала замкнем рубильник A при разомкнутом рубильнике B. Тогда в цепи пойдет ток, который вскоре достигнет значения $\frac{E_0}{R+R_1}$ согласно формуле (5.7). Выберем E_0 так, чтобы было $\frac{E_0}{R+R_1}=j_0$. Дождемся установившегося состояния, когда в схеме с замкнутым A и разомкнутым B ток равен j_0. В этом состоянии замкнем рубильник B и разомкнем A. Получим схему рис. 186, причем в начальный момент времени (в момент замыкания B) в ней идет ток j_0. Потенциал в точке 1 до замыкания $\varphi_1=0$, так как в установившемся состоянии, при постоянном j_0, падение напряжения на индуктивности L равно нулю. Потенциал в точке 2 до замыкания равен $\varphi_2=Rj_0$. При

замыкании рубильника B точка *2* оказывается соединенной с «землей», потенциал в точке *2* $\varphi_2 = 0$. Соответственно перестраивается и потенциал в других точках цепи. В частности, в точке *1* потенциал теперь равен $\varphi_1 = -Rj$.

§ 6. Размыкание цепи с индуктивностью

Выше был рассмотрен процесс установления тока в цепи рис. 187, состоящей из источника напряжения, сопротивления R, индуктивности L и рубильника. На рис. 188 показана кривая нарастания тока, получающаяся при замыкании рубильника в момент $t = 0$. С течением времени ток достигает значения $j_0 = \frac{E_0}{R}$. Что произойдет, если теперь внезапно выключить рубильник B? Если ток прекратился за очень малое время τ, то производная тока по времени $\frac{dj}{dt} \approx \frac{j(t+\tau) - j(t)}{\tau} = -\frac{j_0}{\tau}$, т. е. производная по абсолютной величине будет очень большой, если τ очень мало. При этом возникает очень большой по абсолютной величине отрицательный потенциал в точке A: $\varphi_A = L\frac{dj}{dt} \approx -L\frac{j_0}{\tau}$. Разность потенциалов на сопротивлении R, равная Rj, и э.д.с. источника при размыкании меняются мало. Поэтому большая разность потенциалов, которая получается на индуктивности L, при размыкании почти целиком «садится» на рубильник, т. е. разность потенциалов разомкнутых пластин рубильника оказывается очень большой, порядка $L\frac{j_0}{\tau}$ и может во много раз превосходить э.д.с. источника тока E_0. При большой разности потенциалов происходит электрический пробой воздушного промежутка между разомкнутыми пластинами рубильника и между ними проскакивает искра.

Задача об изменении тока в цепи при размыкании рубильника оказывается очень сложной, так как сложны законы электрического разряда в воздухе между пластинами. В самом деле, до пробоя при $\varphi < \varphi_п$ ток не идет; однако, когда пробой произошел, сопротивление искры резко падает, идет большой ток при разности потенциалов, значительно меньшей $\varphi_п$. Отметим здесь только основной факт: в цепи с индуктивностью при размыкании возникают большие

разности потенциалов; при замыкании такой цепи разность потенциалов нигде не превышает E_0 (э.д.с. источника).

Проследить количественно явление кратковременного повышения разности потенциалов можно на примере двух схем рис. 192 и 193. Отличие этих схем от схемы рис. 187 заключается в том, что ток по индуктивности L может идти и при разомкнутом рубильнике B, так что размыкание происходит без искры. Однако если сопротивление R гораздо больше сопротивления r, то при размыкании возникает большая разность потенциалов на индуктивности.

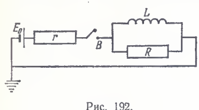


Рис. 192.

Рассмотрим, например, схему рис. 192. Будем считать, что $R \gg r$. Если рубильник замкнут, то в произвольный

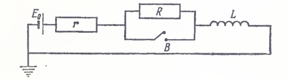


Рис. 193.

момент времени ток в левой части цепи (r; E) равен сумме токов в параллельно соединенных R и L

$$j_r = j_E = j_R + j_L.$$

При этом всегда $\varphi_L = \varphi_R$. Пусть рубильник включен в момент $t = 0$. В этот момент весь ток идет через сопротивление R, так что $j_{r_0} = j_{R_0} = \frac{E_0}{R+r}$ по закону Ома. При этом $\varphi_{r_0} = E_0 \frac{r}{r+R}$, $\varphi_{R_0} = E_0 \frac{R}{r+R}$; следовательно, $\left.\frac{dj_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\varphi_{R_0}}{L} = \frac{E_0}{L} \frac{R}{r+R}$. По истечении достаточного времени после замыкания в цепи установится постоянная сила тока. В установившемся состоянии весь ток идет через индуктивность.

Действительно, если ток j со временем не изменяется, то $\frac{dj}{dt}=0$, поэтому $\varphi_L=0$, а следовательно, $\varphi_R=0$, откуда $j_R=0$.

В установившемся состоянии $\varphi_{r\infty}=E_0$, $j_{r\infty}=j_{L\infty}=\frac{E_0}{r}$. Отсюда нетрудно получить порядок времени установления тока τ_1

$$j_{L\infty}-j_{L_0}\approx\left.\frac{dj_L}{dt}\right|_{t=0}\tau_1$$

или

$$\frac{E_0}{r}\approx\frac{E_0}{L}\,\frac{R}{r+R}\tau_1,$$

откуда

$$\tau_1=\frac{L(R+r)}{rR}\approx\frac{L}{r}.$$

Рассмотрим теперь размыкание цепи, произведенное через время $t\gg\tau_1$ после замыкания, т. е. после того, как в цепи установилось постоянное значение тока $j_\infty=\frac{E_0}{r}$. Когда цепь разомкнута, $j_r=j_E=0$ и $j_R+j_L=0$, откуда $j_R=-j_L$, т. е. весь ток, проходящий через L, должен пройти через R в обратном направлении. По-прежнему, конечно, $\varphi_L=\varphi_R$. Поэтому $\varphi_R=Rj_R=-Rj_L$ или $\varphi_L=-Rj_L$. Так как $\varphi_L=L\frac{dj_L}{dt}$, то

$$L\frac{dj_L}{dt}=-Rj_L.$$

Мы получили уравнение (5.2), что вполне естественно, так как правая часть схемы рис. 192 (после размыкания рубильника) не отличается от схемы рис. 186.

Ток уменьшится в e раз за время $\tau_2=\frac{L}{R}$. При этом $\tau_2\ll\tau_1$, так как $R\gg r$. В момент размыкания ток имеет значение $j_{L\infty}=\frac{E_0}{r}$. После того как размыкание произошло, но раньше, чем ток успел заметно уменьшиться, т. е. при t размыкания $<\tau_2$, получим:

$$\varphi_R=\varphi_L=-Rj_{L\infty}=-E_0\frac{R}{r}.$$

Таким образом, при размыкании можно получить разность потенциалов, во много раз превышающую э.д.с. источника напряжения. Этот принцип широко используется в технике, в частности в системе зажигания двигателей внутреннего сгорания. Отметим, что эта большая разность потенциалов имеет место в течение весьма малого промежутка времени.

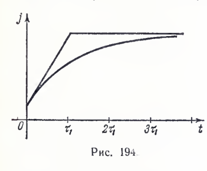


Рис. 194

Мы привели приближенное рассмотрение задачи — без производных и высшей математики. Точное рассмотрение задачи о замыкании рубильника в схеме рис. 192 дает следующее. Исходя из соотношений

$$\varphi_E + \varphi_r + \varphi_L = 0, \quad j = j_R + j_L, \quad \varphi_R = \varphi_L,$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dj_L}{dt} + \frac{rR}{(r+R)L} j_L = \frac{E_0 R}{(r+R)L}.$$

В начальный момент времени $t = 0$ ток через индуктивность равен нулю, т. е. $j_L = 0$ при $t = 0$. Поэтому

$$j_L = \frac{E_0}{r}\left[1 - e^{-\frac{rR}{(r+R)L}t}\right] = \frac{E_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right).$$

Ток в цепи

$$j = j_L + j_R = \frac{E_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \frac{E_0}{R+r} e^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

На рис. 194 приближенное решение соответствует ломаной, точное — плавной кривой.

Рекомендуем читателю рассмотреть процесс изменения тока и разности потенциалов при замыкании и размыкании рубильника в схеме рис. 193. Полезно решить задачу дважды: один раз, составляя дифференциальное уравнение и отыскивая его решение в виде показательной функции, другой раз приближенно, подобно тому, как была рассмотрена схема рис. 192.

§ 7. Энергия индуктивности

Выше мы видели, что в схеме, состоящей только из индуктивности L и сопротивления R, уже после того, как эта схема отсоединена от источника напряжения, продолжает идти ток, постепенно затухающий с течением времени. При этом в сопротивлении выделяется тепло в количестве Rj^2 в единицу времени.

Откуда берется та электрическая энергия, которая в сопротивлении превращается в тепловую? Ее отдает индуктивность, обладающая определенным запасом энергии.

Найдем этот запас энергии, рассматривая простейшую схему рис. 186 и подсчитывая всю тепловую энергию, которая выделится в сопротивлении R. В этой схеме пусть в начальный момент $t=0$ ток равен j_0. С течением времени ток убывает по закону

$$j(t)=j_0 e^{-\frac{Rt}{L}}. \qquad (5.3)$$

Количество энергии, выделяющееся на сопротивлении R в единицу времени, т. е. скорость выделения энергии, есть мгновенная тепловая мощность h. Пользуясь (5.3), находим:

$$h=Rj^2=Rj_0^2 e^{-\frac{2Rt}{L}}. \qquad (7.1)$$

Зная h, нетрудно найти полное количество тепла, выделившееся за время от начального момента $t=0$ до бесконечности (до полного затухания тока). Для этого достаточно проинтегрировать (7.1) от $t=0$ до $t=\infty$. Получим:

$$Q=\int_0^\infty Rj_0^2 e^{-\frac{2Rt}{L}}\,dt=Rj_0^2\int_0^\infty e^{-\frac{2Rt}{L}}\,dt=Rj_0^2\frac{L}{2R}=\frac{Lj_0^2}{2}. \qquad (7.2)$$

Это тепло равно запасу энергии индуктивности, по которой идет ток j_0. Запас энергии не зависит от величины сопротивления R. Индуктивность L с током j_0 имеет определенный запас энергии, который, в конце концов, весь превращается в тепло, независимо от величины сопротивления R. От R зависит только скорость превращения энергии в тепло, но не общее количество энергии.

Формулу (7.2) можно также получить, рассматривая процесс нарастания тока в индуктивности. Действительно, мощ-

ность тока (работа в единицу времени) равна φj. Эта работа, совершаемая внешними источниками тока, тратится на увеличение энергии индуктивности W

$$h = \frac{dW}{dt} = \varphi j. \qquad (7.3)$$

Пользуясь тем, что $\varphi = L\frac{dj}{dt}$, получим из (7.3)

$$\frac{dW}{dt} = Lj\frac{dj}{dt} = \frac{1}{2}L\frac{d(j^2)}{dt}. \qquad (7.4)$$

Будем считать, что при $t=0$ $j=0$, $W=0$, при $t=t_0$ $j=j_0$, $W=W_0$. Тогда, интегрируя (7.4) от $t=0$ до $t=t_0$, получим:

$$W_0 = \frac{1}{2}Lj_0^2.$$

Для конкретности можно представить себе схему рис. 187 ($\varphi=\varphi_A$) и для нее произвести подробный расчет нарастания энергии индуктивности. В установившемся режиме, когда ток достиг постоянного значения j_0, $\varphi_A=0$, энергия индуктивности не меняется, однако источник э.д.с. для поддержания постоянного тока j_0 должен продолжать расходовать энергию, которая выделяется в виде тепла в сопротивлении R.

Энергия индуктивности W пропорциональна квадрату силы тока, т. е. пропорциональна квадрату скорости движения электронов. Поэтому по внешнему виду W напоминает кинетическую энергию. Не есть ли W кинетическая энергия электронов? Сравним порядок величины W и энергии электронов. Располагая медной проволокой длиной 100 *м* $=10^4$ *см* и диаметром 0,35 *мм* (сечение 10^{-3} *см*^{2}), можно намотать катушку, индуктивность которой составит 0,02 *гн*. При токе 1 *а* в такой катушке $W=0{,}02\cdot1^2\cdot0{,}5=10^{-2}$ *дж* $=10^5$ *эрг*. Найдем кинетическую энергию электронов. Будем считать, что на каждый атом меди приходится один электрон, участвующий в прохождении тока («электрон проводимости»). Атомный вес меди около 63, так что на 63 *г* приходится $6\cdot10^{23}$ электронов проводимости, или примерно 10^{22} электронов в одном грамме. Удельный вес меди около 8 *г/см*^{3}, поэтому в 1 *см*^{3} содержится примерно $n=8\cdot10^{22}$ электронов

проводимости. Можно представить себе кусок проволоки длиной $v\,dt$ и сечением S слева от сечения O (рис. 195). Если скорость электронов *) равна v *см/сек*, то через площадь S *см*^{2} за время dt проходит электронов («штук») $Snv\,dt$. За время dt электроны, находившиеся в сечении A, перейдут в сечение O, значит, за это время через O пройдут все электроны, которые находились в объеме между O и A, т. е. в объеме цилиндра длиной $v\,dt$ и с основанием S.

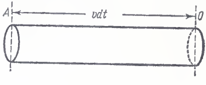


Рис. 195.

Обозначим через e заряд одного электрона в кулонах, $e = -1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*. Количество электричества, которое переносят за время dt эти $Snv\,dt$ электронов, равно току в амперах, умноженному на время dt. Поэтому $Snve\,dt = j\,dt$, откуда $j = Snve$ или $v = \frac{j}{Sne}$. Подставим $j = 1a$, $S = 10^{-3}$ *см*, $n = 8\cdot 10^{22}$, $e = -1{,}6\cdot 10^{-19}$; найдем:

$$v = \frac{1}{10^{-3}\cdot 8\cdot 10^{22}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = 0{,}08 \text{ см/сек}.$$

Найдем теперь кинетическую энергию электронов. Масса электрона $m = 9\cdot 10^{-28}$ *г*. Общее число электронов, движущихся в проволоке, равно

$$10^4 \text{ см}\cdot 10^{-3} \text{ см}^2\cdot 8\cdot 10^{22}\frac{1}{\text{см}^3} \approx 10^{24}.$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = 9\cdot 10^{-28}\cdot 10^{24}\cdot\frac{0{,}08^2}{2} \approx 3\cdot 10^{-6} \text{ эрг}.$$

*) Имеется в виду средняя скорость их движения в направлении тока, а не скорость хаотического теплового движения.

Таким образом, кинетическая энергия электронов составляет ничтожную долю энергии индуктивности, хотя она и зависит от силы тока по тому же закону (пропорциональна j^2), что и энергия индуктивности. Физическая энергия индуктивности есть энергия того *магнитного поля*, которое появляется в катушке, когда по ней течет ток.

Отметим сходство и различие между емкостью и индуктивностью. Как емкость, так и индуктивность могут служить резервуарами, хранилищами энергии. При помощи индуктивности, так же как и при помощи емкости, можно накопить электрическую энергию от слабого, маломощного первичного источника тока и затем быстро ее выделить в нужном месте в нужный момент.

Конденсатор можно заряжать малым током j_1 в течение большого времени t_1; быстро разряжая его через малое сопротивление, за малое время t_2 можно получить большой ток $j_2 \approx \frac{j_1 t_1}{t_2}$. Разность потенциалов конденсатора не превышает при этом э.д.с. первичного источника. Конденсатор позволяет увеличить ток, но не напряжение.

Через индуктивность можно пропускать большой ток при малом напряжении (малой э.д.с.) E_0 первичного источника. Для этого нужно только, чтобы сопротивление индуктивности и первичного источника тока было бы достаточно мало. При этом большой ток в индуктивности устанавливается не сразу, а за сравнительно большое время t_3. При замыкании индуктивности на большое сопротивление удается получить большую разность потенциалов φ на малое время t_4, причем $\varphi \approx E_0 \frac{t_3}{t_4}$. Индуктивность позволяет увеличить напряжение, но не ток.

Существенное практическое отличие емкости от индуктивности заключается в том, что конденсатор, отсоединенный от источника тока, может очень долго, часами и даже сутками, сохранять запасенную в нем энергию. Время разрядки конденсатора равно RC, где C — емкость конденсатора, R — так называемое сопротивление утечки. Применяя хорошие изоляторы, удается получать огромные значения R, т. е. очень большое время разрядки. Индуктивность, выполненная в виде катушки и замкнутая накоротко, т. е. с минимальным возможным сопротивлением, при наличии

в ней электрического тока сохраняет энергию лишь на протяжении долей секунды.

Время затухания тока имеет порядок $\frac{L}{R}$, но, даже применяя наилучшие проводники (медь, серебро), нельзя сделать $\frac{L}{R}$ больше нескольких секунд для катушки лабораторных размеров. Заметим, что при увеличении числа витков катушки в данном объеме за счет применения более тонкой проволоки увеличивается L, но увеличивается и R, их отношение по порядку величины не изменяется. Поэтому в лабораторных условиях индуктивность удобно применять для повышения напряжения, но не для длительного хранения энергии.

В схемах, использующих емкости и индуктивности, удается накапливать энергию от батареи карманного фонаря. Такая батарея дает несколько вольт при внутреннем сопротивлении в несколько ом, так что максимальная мощность ее порядка 1—2 *вт*. При помощи вышеупомянутых схем удается получать мощность в сотни киловатт. Однако такая мощность действует в течение времени порядка 10^{-6} *сек*.

Выше было отмечено, что в индуктивности электрическая энергия быстро превращается в тепло за счет сопротивления. Это утверждение справедливо для катушек обычного «комнатного», лабораторного, масштаба и в случае обычных, нормальных, температур. Однако в двух крайних случаях это утверждение оказывается неверным.

1. При очень низкой температуре, порядка — 260° С и ниже, до абсолютного нуля (—273° С), многие металлы (например, свинец, ртуть, но не медь) переходят в так называемое сверхпроводящее состояние. Их удельное сопротивление становится в точности равным нулю.

Голландский ученый Каммерлинг-Онес, открывший это явление в 1911 г., наблюдал в кольце из сверхпроводящего материала постоянный ток, который не ослабевал в течение многих суток. Наличие тока в таком кольце обнаруживается по магнитному полю этого тока.

Возможности практического применения сверхпроводников ограничиваются не только трудностью получения низкой температуры. Сильное магнитное поле переводит сверхпроводник в нормальное состояние (с конечным сопротив-

лением). Поэтому через сверхпроводник нельзя пропускать большие токи*).

2. Соотношение между индуктивностью и сопротивлением и условия затухания тока очень сильно изменяются при увеличении всех размеров катушки и особенно при переходе к астрономическим явлениям**).

Представим себе две геометрически подобные катушки, одна из которых в n раз больше другой. При этом число витков в обеих катушках одинаково. В большой катушке в n раз больше диаметр катушки, но во столько же раз больше и высота катушки и диаметр проволоки, из которой сделана катушка. Пусть катушки изготовлены из одинакового материала. Будем обозначать величины, относящиеся к меньшей катушке, индексом 1, а величины, относящиеся к большей катушке, индексом 2. Подсчитаем отношение сопротивлений катушек

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S_1}, \quad R_2 = \rho \frac{l_2}{S_2},$$

где ρ — удельное сопротивление материала катушки, l — длина проволоки, S — площадь ее поперечного сечения.

Геометрически ясно, что

$$l_2 = nl_1, \;\; S_2 = n^2 S_1$$

и, следовательно,

$$R_2 = \frac{1}{n} R_1.$$

Сопротивление обратно пропорционально n, т. е. обратно пропорционально размеру.

Можно доказать, что индуктивность большой катушки ровно в n раз больше индуктивности малой катушки,

$$L_2 = nL_1,$$

т. е. при увеличении линейных размеров катушки в n раз ее индуктивность увеличивается также в n раз. Время

---

*) В 1961 г. открыт сплав редкого элемента ниобия с оловом, в котором ток до 100 000 $a/см^2$ и магнитное поле до 250 000 *гс* еще не разрушают сверхпроводимости.

**) Сравните с задачей 3 к § 2: для емкости с сопротивлением время разрядки не изменяется при изменении всех размеров.

затухания тока τ имеет порядок $\frac{L}{R}$, следовательно,

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}, \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} = n^2 \frac{L_1}{R_2} = n^2 \tau_1.$$

Таким образом, время затухания тока пропорционально квадрату размера. Если бы земной шар состоял из меди, то время затухания тока в нем было бы порядка 10^{15}—10^{16} *сек*, т. е. 10^8 лет.

Проводимость ионизованных газов того же порядка, что и проводимость меди, поэтому в астрономических явлениях время затухания тока оказывается огромным. Это значит, что сопротивление, закон Ома, не играют никакой роли в этих явлениях: напомним рис. 190, ток на начальном участке кривой зависит только от L, но не от R; в астрономии мы всегда находимся на «начальном участке».

Земной магнетизм представляет собой магнитное поле токов, протекающих в вязкой расплавленной массе центрального ядра Земли. Медленные движения этой расплавленной массы в самом этом магнитном поле поддерживают эти токи, как движение якоря динамо-машины в магнитном поле поддерживает ток в обмотке якоря и в обмотке электромагнита.

§ 8. Колебательный контур

Рассмотрим контур, состоящий из емкости C и индуктивности L (рис. 196). Пусть точка B контура заземлена. По формуле (1.11) $\varphi_C + \varphi_L = 0$.

Здесь $\varphi_L = L\frac{dj}{dt}$, $\varphi_C = \frac{q}{C}$.

Падение напряжения на емкости φ_C будем обозначать просто φ. Тогда

$$\varphi + L\frac{dj}{dt} = 0. \qquad (8.1)$$

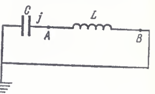


Рис. 196.

Заметим, что $j = \frac{dq}{dt}$. Поэтому $\frac{dj}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$. Так как $\frac{d^2q}{dt^2} = C\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, то, пользуясь соотношением (8.1), находим:

$$\varphi + LC\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{LC}\varphi. \tag{8.2}$$

Аналогичное уравнение мы рассматривали в главе V при изучении механических колебаний. Там было установлено, что решением (8.2) являются функции $\varphi = A \sin \omega t$ и $\varphi = B \cos \omega t$ при любых A и B и надлежащим образом подобранном ω. Проверим это, например, для $\varphi = A \sin \omega t$ и попутно определим ω. Для этого φ и $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ подставляем в (8.2).

Получим

$$-ALC\omega^2 \sin \omega t = -A \sin \omega t$$

или, сокращая на $-A \sin \omega t$,

$$LC\omega^2 = 1.$$

Отсюда находим:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{8.3}$$

Следовательно, решением уравнения (8.2) являются функции, описывающие колебания с круговой частотой $\frac{1}{\sqrt{LC}}$; период таких колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{8.4}$$

Проверим размерность (8.4): размерность емкости — $[C] = \text{фарада} = \frac{\text{кулон}}{\text{вольт}} = \frac{\text{ампер}\cdot\text{секунда}}{\text{вольт}}$, размерность индуктивности — $[L] = \text{генри} = \frac{\text{вольт}}{\text{ампер/секунда}} = \frac{\text{вольт}\cdot\text{секунда}}{\text{ампер}}$, так что действительно $\sqrt{LC}$ имеет размерность *секунда*.

Обратимся к подробному рассмотрению решения уравнения (8.2). Решения $\varphi = A \sin \omega t$ и $\varphi = B \cos \omega t$ по существу не отличаются одно от другого, так как кривая синуса получается из кривой косинуса сдвигом по оси t. Поэтому рассмотрим одно из решений, например

$$\varphi = B \cos \omega t.$$

Амплитуда B может быть любой. При заданном $\varphi(t)$ найдем зависимость тока от времени

$$j = C\frac{d\varphi}{dt} = -CB\omega\sin\omega t.$$

Найдем энергию емкости и энергию индуктивности

$$W_C = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{CB^2}{2}\cos^2\omega t, \quad W_L = \frac{Lj^2}{2} = \frac{LC^2B^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t.$$

Подставляя сюда выражение ω (8.3), получим:

$$W_L = \frac{CB^2}{2}\sin^2\omega t.$$

Полная энергия, как и следовало ожидать, от времени не зависит; действительно,

$$P = W_C + W_L = \frac{CB^2}{2}(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \frac{CB^2}{2}.$$

Таким образом, движение зарядов контура, составленного из емкости и индуктивности, похоже на движение массы, закрепленной на пружине. Энергию заряженного конденсатора можно уподобить упругой энергии пружины, которая максимальна в момент, когда масса находится в крайнем положении, на максимальном расстоянии от положения равновесия. Энергию индуктивности можно уподобить кинетической энергии движущей массы. В момент, когда заряд емкости равен нулю, ток достигает максимального значения (по абсолютной величине); в этот момент энергия емкости равна нулю, а энергия индуктивности равна полной энергии ($\cos^2\omega t = 0$, $\sin^2\omega t = 1$). Точно так же при колебаниях массы на пружине в момент, когда масса проходит через положение равновесия, потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия равна полной энергии колебаний.

Назовем общей задачей задачу о нахождении потенциала в контуре при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ $j = j_0$, $\varphi = \varphi_0$. Ни решение $\varphi = A\sin\omega t$, ни решение $\varphi = B\cos\omega t$ не дают нам возможности решить общую задачу. Для решения общей задачи образуем сумму

$$\varphi = A\sin\omega t + B\cos\omega t. \tag{8.5}$$

Легко проверить, что эта сумма является решением уравнения (8.2).

При этом

$$j = C\frac{d\varphi}{dt} = CA\omega\cos\omega t - CB\,\omega\sin\omega t. \tag{8.6}$$

Полагая $t=0$ в формуле (8.5) и (8.6), получим:

$$\varphi(0) = B = \varphi_0, \quad j(0) = CA\omega = j_0,$$

откуда найдем решение с заданными φ_0 и j_0

$$\varphi = \frac{j_0}{C\omega}\sin\omega t + \varphi_0\cos\omega t, \quad j = j_0\cos\omega t - C\varphi_0\omega\sin\omega t. \tag{8.7}$$

Предлагаем читателю проверить, что при таких колебаниях полная энергия постоянна и равна начальной энергии

$$\frac{C\varphi_0^2}{2} + \frac{Lj_0^2}{2}.$$

Выражение (8.7) для φ можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_m\cos(\omega t + \alpha) \tag{8.8}$$

с амплитудой φ_m. В момент, когда $\cos(\omega t + \alpha) = \pm 1$, вся энергия есть энергия емкости, т. е. $\frac{C\varphi_m^2}{2}$. Ввиду того, что полная энергия сохраняется, находим $\frac{C\varphi_m^2}{2} = \frac{C\varphi_0^2}{2} + \frac{Lj_0^2}{2}$, откуда $\varphi_m = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{L}{C}j_0^2}$. Из выражения (8.8) находим: $j = -C\varphi_m\omega\sin(\omega t + \alpha) + C\varphi_m\omega\sin(\omega t + \alpha_1) = j_m\sin(\omega t + \alpha_1)$, где $\alpha_1 = \pi + \alpha$, $j_m = C\varphi_m\omega$. Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{C\varphi_0^2}{2} + \frac{Lj_0^2}{2} = \frac{Lj_m^2}{2},$$

откуда

$$j_m = \sqrt{j_0^2 + \frac{C}{L}\varphi_0^2}.$$

Конечно, значения φ_m и j_m можно получить и без энергетических соображений, пользуясь формулами тригонометрии.

Схема для осуществления колебаний показана на рис. 197. В схеме имеется источник напряжения E_0. Если замкнуть A при разомкнутом B, то по истечении промежутка времени $\tau \gg RC$ после замыкания емкость будет заряжена до потенциала E_0. Разомкнем A и после этого в момент $t=0$ замк-

нем B. Тогда в цепи, состоящей из L и C, начнутся колебания с $\varphi=\varphi_0=E_0$, $j=0$ в момент $t=0$. Отметим, что при этих колебаниях разность потенциалов на пластинах разомкнутого рубильника A будет периодически меняться от 0 до $2E_0$.

Возможен другой вариант возбуждений колебаний в схеме рис. 197. Сперва замыкаются оба рубильника A и B. Тогда в цепи устанавливается ток $j_0=\frac{E_0}{R}$. Затем в момент $t=0$

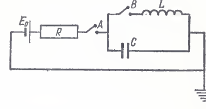


Рис. 197.

размыкается рубильник A. При этом в контуре, состоящем из L и C, начинаются колебания, причем в начальный момент $\varphi_0=0$ $j_0=\frac{E_0}{R}$. При этих колебаниях максимальная амплитуда потенциала достигает

$$\varphi_m=j_0\sqrt{\frac{L}{C}}=E_0\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Напомним, что в схеме без емкости при размыкании цепи, содержащей индуктивность L, на рубильнике развивается тем большая разность потенциалов, чем больше сопротивление воздушного промежутка между пластинами рубильника. При размыкании такой цепи (без емкости) между пластинами рубильника обязательно возникает разряд в воздушном промежутке. При наличии емкости максимальная разность потенциалов между пластинами рубильника A не превышает определенного значения $(E_0+\varphi_m)$. Если это значение меньше того, которое необходимо для зажигания разряда в воздушном промежутке рубильника, то разряда не будет: говорят, что включение емкости C «гасит» разряд при размыкании цепи с индуктивностью. Отметим, что величина $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

может быть больше единицы. Тогда, размыкая рубильник B через четверть периода после размыкания A, получим на емкости C потенциал более высокий, чем потенциал источника тока E_0.

Упражиеиия

1. Определить α в формуле (8.8).

2. Рассмотреть измеиение потенциала со времеием в цепи рис. 198. Определить иаибольшее зиачение φ и время, когда достигается это

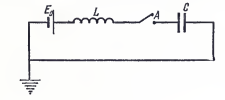


Рис 198.

наибольшее зиачеиие. Считать, что рубильиик A в схеме замыкают в момент $t=0$.

3. В предыдущей задаче иайти эиергию емкости и эиергию, отданиую источииком тока в момент, когда φ максимальио.

§ 9. Затухающие колебания

Рассмотрим контур, в котором последовательно с индуктивностью включено сопротивление R (рис. 199). Будем считать, что R мало. Если R совсем не принимать во внимаиие,

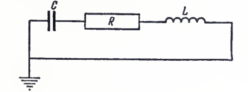


Рис. 199.

то мы получим схему рис. 196, которая была изучена в § 8. Если при $t=0$ было $\varphi=\varphi_0$, $j=0$, то по (8.7)

$$\varphi=\varphi_0 \cos \omega t, \quad j=j_m \sin (\omega t+\pi), \tag{9.1}$$

где положено

$$j_m = C\varphi_0\omega, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{9.2}$$

При этом полная энергия $P = \frac{C\varphi_0^2}{2}$ или, пользуясь (9.2), можно записать также:

$$P = \frac{Lj_m^2}{2}. \tag{9.3}$$

При наличии сопротивления происходит превращение электрической энергии в тепловую. Тепловая мощность h равна

$$h = Rj^2 = Rj_m^2 \sin^2(\omega t + \pi) = Rj_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{Rj_m^2}{2}(1 - \cos 2\omega t). \tag{9.4}$$

Тепловая мощность при электрических колебаниях не остается постоянной, на протяжении каждого периода h дважды достигает максимума и дважды обращается в нуль *). Найдем среднее значение h за период. Из формулы (9.4) находим $\overline{h} = \frac{Rj_m^2}{2}(1 - \overline{\cos 2\omega t})$; вспоминая, что среднее значение косинуса за период равно нулю, получаем:

$$\overline{h} = \frac{Rj_m^2}{2}.$$

Выделение тепла на сопротивлении R может происходить только за счет уменьшения электрической энергии P. Поэтому

$$\frac{dP}{dt} = -h. \tag{9.5}$$

Мы предположили, что R мало, значит, и h мало. Энергия колебаний убывает медленно, значительное изменение энергии заметно лишь по истечении нескольких периодов. Рассматривая промежутки времени, большие по сравнению с периодом колебаний T, заменим в правой части (9.5) h на $\overline{h}$

$$\frac{dP}{dt} = -\overline{h} = -\frac{Rj_m^2}{2}. \tag{9.6}$$

*) Знак ее, конечно, не изменяется.

Поскольку энергия P медленно меняется, то из (9.3) видим, что и j_m есть медленно меняющаяся величина. Выразив j_m из (9.3), получим:

$$j_m = \sqrt{\frac{2P}{L}}. \tag{9.7}$$

Пользуясь (9.7), получаем из (9.6)

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{R}{L} P.$$

Решение этого уравнения есть

$$P = P_0 e^{-\frac{R}{L} t},$$

где P_0 — это значение P при $t = 0$. Поэтому согласно (9.7)

$$j_m = \sqrt{\frac{2P_0}{L}}\, e^{-\frac{Rt}{2L}}.$$

Тогда

$$j = \sqrt{\frac{2P_0}{L}}\, e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin(\omega t + \pi). \tag{9.8}$$

Вспоминая, что $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$, а $\varphi_0 = \frac{j_m}{C\omega}$, получаем:

$$\varphi = \frac{j_m}{C\omega} \cos \omega t = \frac{1}{C\omega} \sqrt{\frac{2P_0}{L}}\, e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos \omega t. \tag{9.9}$$

Формулы (9.8) и (9.9) показывают, что при наличии небольшого сопротивления электрические колебания затухают по показательному закону.

Выписанное выше решение получено при помощи приближенного расчета. Заметим, что в этом приближенном решении не удовлетворяется соотношение $j = C\frac{d\varphi}{dt}$, хотя оно выполнено тем точнее, чем меньше R. Постараемся теперь решить задачу точно. Для схемы рис. 199 имеем соотношение $\varphi + \varphi_R + \varphi_L = 0$, откуда

$$\varphi + Rj + L\frac{dj}{dt} = 0, \tag{9.10}$$

причем $j = C\frac{d\varphi}{dt}$. Подставляя в (9.10) выражение для j и $\frac{dj}{dt}$, находим:

$$LC\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varphi - RC\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (9.11)$$

Будем искать решение уравнения (9.11) в том же виде, который мы получили в приближенном рассмотрении, т. е.

$$\varphi = Ae^{-\lambda t}\cos\omega t, \qquad (9.12)$$

где λ, ω, A — постоянные числа, которые надо определить. Выражения для φ и его производных подставим в уравнение (9.11) и сократим все члены на общий множитель $Ae^{-\lambda t}$. Получим:

$$LC\lambda^2\cos\omega t + 2LC\lambda\omega\sin\omega t - LC\omega^2\cos\omega t =$$
$$= -\cos\omega t + RC\lambda\cos\omega t + RC\omega\sin\omega t.$$

Для того чтобы это равенство имело место при любом t, нужно, чтобы были равны справа и слева коэффициенты при $\cos\omega t$ и при $\sin\omega t$ в отдельности

$$LC\lambda^2 - LC\omega^2 = RC\lambda - 1, \qquad (9.13)$$
$$2LC\lambda\omega = RC\omega. \qquad (9.14)$$

Условие (9.14) дает $\lambda = \frac{R}{2L}$, после чего из (9.13) получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \qquad (9.15)$$

Постоянная A из уравнения (9.11) не определилась. Величина этой постоянной определяется из начального условия: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$. Наконец, зная $\varphi(t)$, легко найдем $j = C\frac{d\varphi}{dt}$. Получим:

$$j = -CAe^{-\lambda t}(\omega\sin\omega t + \lambda\cos\omega t). \qquad (9.16)$$

Сравнивая точное решение с приближенным, отметим следующее: 1) в приближенном рассмотрении задачи мы правильно определили число λ, характеризующее скорость затухания колебаний. Однако приближенное решение не дает зависимости частоты ω от величины сопротивления R; 2) фор-

мула для тока несколько отличается от той, которая была получена приближенно.

Точно таким же способом можно показать, что уравнение (9.11) имеет еще одно решение

$$\varphi = Be^{-\lambda t} \sin \omega t, \qquad (9.17)$$

причем ω и λ те же самые. Соответствующая сила тока

$$j = CBe^{-\lambda t} (\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t). \qquad (9.18)$$

Сумма решений (9.12) и (9.17) также является решением уравнения (9.11). Только при помощи этой суммы можно решить общую задачу: найти решение уравнения (9.11) с начальным условием при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $j = j_0$. Действительно, тогда для коэффициентов A и B получаем уравнения $\varphi_0 = A$, $j_0 = CA\lambda - CB\omega$, откуда

$$A = \varphi_0, \quad B = \frac{C\lambda\varphi_0 - j_0}{C\omega}.$$

Упражнения

1. Найти $j(t)$ в схеме рис. 199, если $C = 1$, $L = 1$, $R = 0,1$; 0,5; 1. При $t = 0$ $\varphi = 1$, $j = 0$.
2. Тот же вопрос, если при $t = 0$ $\varphi = 0$, $j = 1$.

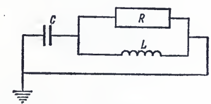


Рис. 200.

3. Приближенным методом найти скорость затухания колебаний λ в схеме рис. 200, считая, что R весьма велико.

§ 10. Случай большого сопротивления

Рассматриваемый здесь случай большого сопротивления представляет главным образом математический интерес и не связан с дальнейшим материалом. Поэтому в первом чтении этот параграф может быть пропущен.

Решение уравнения (9.11), полученное в предыдущем параграфе, справедливо лишь для не слишком больших R. Действительно, из (9.15) видно, что если $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то ω смысла не имеет, так как под корнем получается отрицательное число. В этом случае уравнение (9.11) имеет решение другого вида. Будем искать решение в виде $\varphi = Ae^{-\beta t}$ (соответственно $j = -AC\beta e^{-\beta t}$). Подставляя в (9.11) выражения для φ и его производных и сокращая все члены на $Ae^{-\beta t}$, получим:

$$LC\beta^2 = -1 + RC\beta.$$

Это — квадратное уравнение для β. Решая его, найдем:

$$\beta = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \tag{10.1}$$

Подкоренное выражение в (10.1) отличается знаком от подкоренного выражения в (9.15) для ω. Следовательно, как раз в тех случаях, когда нельзя найти ω, можно найти β. Формула (10.1) дает два различных значения β, поэтому можно составить два решения уравнения (9.11)

$$\varphi = Ae^{-\beta_1 t} \text{ и } \varphi = Be^{-\beta_2 t}.$$

Решением будет и их сумма:

$$\varphi = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}. \tag{10.2}$$

Соответственно

$$j = -AC\beta_1 e^{-\beta_1 t} - BC\beta_2 e^{-\beta_2 t}. \tag{10.3}$$

Если при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $j = j_0$, то, полагая $t = 0$ в (10.2) и (10.3), получим:

$$A + B = \varphi_0, \quad -AC\beta_1 - BC\beta_2 = j_0.$$

Из этой системы уравнений можно найти A и B.

Рассмотрим более подробно выражение для β. Пусть $R \gg 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Тогда $\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \frac{R}{2L}\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}$ можно разложить по формуле бинома Ньютона. Ограничимся двумя членами $\frac{R}{2L}\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}} = \frac{R}{2L}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4L}{R^2C}\right) = \frac{R}{2L} - \frac{1}{RC}$. Поэтому $\beta_1 = \frac{R}{2L} + \frac{R}{2L} - \frac{1}{RC} = \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \approx \frac{R}{L}$, так как R велико,

$\beta_2 = \frac{R}{2L} - \frac{R}{2L} + \frac{1}{RC} = \frac{1}{RC}$. Эти значения β_1 и β_2 знакомы нам из §§ 1—5. Действительно, β_1 соответствует затуханию тока по закону $e^{-\frac{R}{L}t}$, т. е. как в цепи, составленной только из индуктивности и сопротивления (см. § 5). Второй корень β_2 соответствует затуханию тока по закону $e^{-\frac{t}{RC}}$, т. е. как в цепи, состоящей только из емкости и сопротивления (см. § 2).

Представляет математический интерес частный случай, когда подкоренное выражение в (10.1) точно равно нулю

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

так что оба корня β_1 и β_2 совпадают. Мы получаем только одно решение уравнения (9.11). Однако для того чтобы решить задачу с начальными условиями при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $j = j_0$, нам надо два решения.

Как найти второе решение? Предположим, что $\beta_1 \neq \beta_2$, но $\beta_1 - \beta_2$ — малая величина. Тогда мы имеем два решения: $e^{-\beta_1 t}$ и $e^{-\beta_2 t}$. Их разность также является решением. Запишем это решение так:

$$e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t} = e^{-\beta_2 t}\left[e^{(\beta_2 - \beta_1)t} - 1\right].$$

Так как $\beta_2 - \beta_1$ мало, то*) $e^{(\beta_2 - \beta_1)t} \approx 1 + (\beta_2 - \beta_1)t$, откуда

$$e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t} = e^{-\beta_2 t}\, t\,(\beta_2 - \beta_1).$$

Последнее выражение наводит на мысль, что в случае $\beta_2 = \beta_1 = \beta$ надо второе решение брать в виде $\varphi = Bte^{-\beta t}$. Подставляя это φ в уравнение (9.11) и учитывая, что $\beta = \frac{R}{2L}$, увидим, что уравнение действительно удовлетворяется. Итак, в случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ надо брать φ в виде

$$\varphi = Ae^{-\beta t} + Bte^{-\beta t}.$$

Такое φ (и соответствующее j) позволяет решить задачу с любыми начальными φ_0 и j_0.

*) В ряде Тейлора можно удержать только два члена.

Упражнения

1. Найти $\varphi(t)$ при $t=0$, $\varphi_0=1$, $j_0=0$ для $L=1$, $C=1$, $R=2$; 6; 10.
2. Найти $\varphi(t)$ для $L=1$, $C=1$, $R=2$; 4 при условии, что при $t=0$ $\varphi_0=1$, $j_0=1$.

§ 11. Переменный ток

В отличие от рассматривавшихся ранее схем, теперь будем рассматривать схемы, в которых источник напряжения имеет э. д. с., периодически меняющуюся со временем, с определенной заданной частотой ω. Эти задачи имеют большое значение для радиосхем. Частота переменного тока совершенно по-разному влияет на прохождение тока через индуктивность и емкость. Чем больше частота, тем быстрее меняется ток, тем «труднее» он проходит через индуктивность, тем больше разность потенциалов, создаваемая током данной силы. Напротив, на пластинах конденсатора разность потенциалов тем меньше, чем больше частота. При увеличении частоты уменьшается период и, следовательно, уменьшается время, в течение которого ток, сохраняя свое направление, заряжает конденсатор. Поэтому с увеличением частоты уменьшается заряд конденсатора, уменьшается разность потенциалов на его пластинах.

Мы уже отмечали в § 8, что движение зарядов в контуре, состоящем из индуктивности и емкости (контур L, C), можно уподобить колебанию тела, подвешенного на пружине: если при колебании тела периодически меняются его расстояние от начала координат и скорость, то в контуре периодически изменяются потенциал и сила тока.

Частота, с которой колеблется тело под действием упругой силы пружины (при отсутствии всяких других сил), называется собственной частотой колебаний. Подобно этому частота колебаний потенциала в контуре L, C называется собственной частотой этого контура.

Развивая эту аналогию дальше, можно предположить, что если контур включен в цепь переменного тока, т. е. периодически меняется подаваемый на контур потенциал, то будет иметь место явление резонанса. Оно состоит в том, что амплитуда колебаний максимальна при частоте тока ω, равной собственной частоте контура ω_0. Амплитуда очень резко возрастает при приближении $(\omega-\omega_0)$ к нулю. Явление резонанса на самом деле имеет место, оно будет рассмотрено в § 13.

Для каждого двухполюсника (см. стр. 488, рис. 175), включенного в цепь переменного тока, есть определенное соотношение между разностью потенциалов и силой тока. Найдем это соотношение сперва для наиболее простого случая отдельных элементов R, L, C, с тем чтобы потом (в §§ 13 и 14) выяснить, как находить это соотношение для более сложных схем.

Будем рассматривать переменный ток определенной частоты ω; как и раньше, частота ω связана с периодом соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Так, например, в СССР широко применяется 50-периодный ток: $T = \frac{1}{50}$ *сек*, $\omega = 2\pi \cdot 50 = 314 \frac{1}{сек}$.

Представим себе схему, показанную на рис. 201. В цепь включены амперметр A, показывающий силу тока j, и вольтметр V, измеряющий напряжение (разность потенциалов). Допустим, что амперметр и вольтметр настолько безынерционные, быстродействующие, что они позволяют измерять мгновенное значение тока в каждый момент, и, следовательно, показания их измеряются с периодом, равным периоду тока. Практически такой опыт проводится с помощью осциллографа, так называемого шлейфового осциллографа с двумя шлейфами, или с помощью катодного осциллографа с двумя лучами. Положительное направление тока показано стрелкой. Вольтметр V измеряет величину $\varphi = \varphi_A - \varphi_B$. Включая тот или иной рубильник, исследуем прохождение тока через сопротивление, индуктивность или емкость.

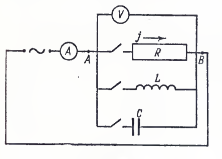


Рис. 201.

Пусть ток меняется со временем по закону

$$j = j_0 \cos(\omega t + \alpha). \tag{11.1}$$

Если этот ток идет по сопротивлению R, то по закону Ома

$$\varphi_R = Rj = Rj_0 \cos(\omega t + \alpha). \qquad (11.2)$$

Для общности запишем это равенство так:

$$\varphi_R(t) = \varphi_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad \text{где} \quad \varphi_1 = Rj_0, \ \alpha = \alpha_1.$$

Пусть ток (11.1) идет через индуктивность L. Тогда

$$\varphi_L = L\frac{dj}{dt} = -L\omega j_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

Положим

$$\varphi_L = \varphi_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \qquad (11.3)$$

Тогда $\varphi_2 = L\omega j_0$, $\alpha_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Действительно, известно, что $\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\beta$ при любом β, поэтому

$$\cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega t + \alpha).$$

Таким образом, в случае переменного тока соотношение между амплитудой тока j и амплитудой напряжения φ_2 в индуктивности такое же, как в сопротивлении, равном $R_2 = L\omega$. При этом если L выражено в генри, ω в обратных секундах, то R_2 выражено в омах.

Отличие индуктивности от сопротивления проявляется в том, что кривая напряжения сдвинута относительно кривой

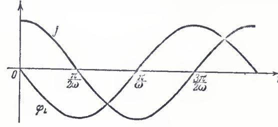


Рис. 202.

тока на четверть периода (рис. 202). В этом можно убедиться и непосредственно по формуле

$$-\sin(\omega t + \alpha) = \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\omega\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) + \alpha\right].$$

Пусть функция $\cos(\omega t+\alpha)$, которой пропорционален ток, достигает какого-то определенного значения в момент t_1

$$\cos(\omega t_1+\alpha)=a.$$

Функция $\cos\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, которой пропорционально напряжение на индуктивности, достигает того же значения a в некоторый другой момент времени t_2, так что

$$\cos\left(\omega t_2+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=a=\cos(\omega t_1+\alpha).$$

Поэтому $\omega t_2+\frac{\pi}{2}=\omega t_1$, откуда $t_2=t_1-\frac{\pi}{2\omega}=t_1-\frac{T}{4}$, т. е. напряжение опережает ток на четверть периода.

Разумеется, можно прибавить к t_1 любое целое число периодов, так что можно писать $t_2=t_1-\frac{T}{4}+T=t_1+\frac{3}{4}T$ или $t_2=t_1+\frac{7}{4}T$. В формуле найден наименьший (по абсолютной величине) сдвиг по времени, который переводит кривую тока в кривую напряжения.

Рассмотрим случай емкости. В этом случае $j=C\frac{d\varphi_C}{dt}$, поэтому*)

$$\varphi_C=\frac{1}{C}\int j\,dt=\frac{1}{C}\int j_0\cos(\omega t+\alpha)\,dt=\frac{j_0}{C\omega}\sin(\omega t+\alpha). \quad (11.4)$$

Записав φ_C в виде $\varphi_C=\varphi_3\cos(\omega t+\alpha_3)$, получим:

$$\varphi_3=\frac{1}{C\omega}j_0,\quad \alpha_3=\alpha-\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, в цепи переменного тока соотношение между амплитудой тока и амплитудой напряжения на емкости такое же, как на сопротивлении, равном $R_3=\frac{1}{C\omega}$. Выражая емкость в фарадах и частоту в обратных секундах, получим R_3 в омах.

*) Постоянная интегрирования равна $\bar{\varphi}_C$. В переменном токе всегда $\bar{\varphi}_C=0$.

Кривая напряжения в емкости сдвинута относительно кривой тока *вперед* на четверть периода (рис. 203). Таким образом, кривая напряжения φ_C в емкости сдвинута в сторону, противоположную кривой φ_L.

При данном одинаковом токе φ_L и φ_C имеют противоположный знак. Если же совместить кривые φ_L и φ_C, то окажется, что ток, идущий через емкость, и ток, идущий через индуктивность, имеют противоположные знаки. Действительно,

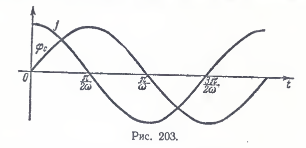


Рис. 203.

все формулы, выражающие φ в зависимости от j, легко обратить, т. е. выразить j в зависимости от φ. Напишем их рядом:

$$j = j_0 \cos(\omega t + \alpha),$$
$$\varphi_R = R j_0 \cos(\omega t + \alpha),$$
$$\varphi_L = L\omega j_0 \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -L\omega j_0 \sin(\omega t + \alpha),$$
$$\varphi_C = \frac{1}{C\omega} j_0 \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{C\omega} j_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha),$$
$$j_R = \frac{\varphi_0}{R} \cos(\omega t + \alpha),$$
$$j_L = \frac{\varphi_0}{L\omega} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\varphi_0}{L\omega} \sin(\omega t + \alpha),$$
$$j_C = \varphi_0 C\omega \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\varphi_0 C\omega \sin(\omega t + \alpha).$$

Противоположный сдвиг фазы и противоположные знаки в формулах, относящиеся к индуктивности и емкости, имеют решающее значение при рассмотрении L и C, включенных вместе.

В опытах с переменным током часто пользуются однолучевым катодным осциллографом. При этом на одну пару отклоняющих пластин (отклонение по оси x) подают напря-

жение, пропорциональное силе тока. На другую пару пластин (отклонение по оси y) подают напряжение, пропорциональное φ. Луч движется по линии, уравнение которой имеет вид $x=aj$, $y=b\varphi$; коэффициенты a и b зависят от чувствительности осциллографа. Так как j и φ суть периодические функции времени, то луч прочерчивает на экране все время одну и ту же линию. При частоте 50 периодов в секунду глаз не замечает движения луча, а видит сплошную светящуюся линию.

Если на пластинки вертикального отклонения осциллографа подается разность потенциалов с сопротивления, φ_R, то луч описывает прямую; в самом деле,

$$x=aj=aj_0\cos(\omega t+\alpha),\quad y=b\varphi_R=bRj_0\cos(\omega t+a),$$

исключая t, найдем $y=\frac{a}{bR}x$. Если на эти пластинки подается разность потенциалов с емкости, φ_C, то получается эллипс:

$$x=aj_0\cos(\omega t+\alpha),\quad y=b\frac{1}{C\omega}j_0\sin(\omega t+\alpha),$$

$$\left(\frac{x}{aj_0}\right)^2+\left(\frac{y}{bj_0/C\omega}\right)^2=\cos^2(\omega t+\alpha)+\sin^2(\omega t+\alpha)=1.$$

Точно так же эллипс получается при включении φ_L. При включении $\varphi_R+\varphi_L$ или $\varphi_R+\varphi_C$ оси симметрии эллипса уже не совпадают с осями x и y. Таким образом, по форме осциллограммы можно судить, что включено в цепь (C, L или R), чем «начинен ящик» (стр. 440, рис. 175).

§ 12. Средние величины, мощность и сдвиг фазы

В предыдущем параграфе ток и напряжение рассматривались как функции времени. Однако во многих вопросах достаточно знать средние значения этих величин.

Как простейший пример рассмотрим нагревательный прибор с сопротивлением R. Мы знаем, что в цепи постоянного тока мощность (т. е. количество энергии, выделяющейся в единицу времени) равна $h=\varphi j=Rj^2=\varphi^2/R$. В цепи переменного тока мгновенная мощность равна

$$h(t)=\varphi(t)\,j(t)=R\,[j(t)]^2=[\varphi(t)]^2/R.$$

Поэтому

$$h(t)=Rj_0^2\cos^2(\varphi t+\alpha). \qquad (12.1)$$

На протяжении одного периода $h(t)$ дважды обращается в нуль и дважды достигает максимального значения, равного Rj_0^2. При рассмотрении нагревательных приборов нас обычно интересует количество тепла, выделившееся за время t, во много раз превышающее период переменного тока T. Поэтому найдем среднее значение мощности за большой промежуток времени t. В силу (12.1)

$$\bar{h} = \overline{R\, j_0^2 \cos^2(\omega t + \alpha)} = Rj_0^2\, \overline{\cos^2(\omega t + \alpha)} = Rj_0^2/2, \quad (12.2)$$

причем последнее равенство приближенное, и оно тем точнее, чем больше t.

Принято определять среднее значение силы переменного тока $\bar{j}$ как силу постоянного тока, выделяющего равную мощность на сопротивлении R,

$$R\bar{j}^2 = \frac{Rj_0^2}{2}. \quad (12.3)$$

Из (12.3) находим:

$$\bar{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot j_0 \approx 0{,}71 j_0. \quad (12.4)$$

Точно так же среднее значение напряжения $\bar{\varphi}$ определяется из условия

$$h = \frac{\bar{\varphi}^2}{R} = \frac{\varphi_0^2}{2R}, \text{ откуда } \bar{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_0. \quad (12.5)$$

Приборы, измеряющие переменный ток, — амперметры, вольтметры — градуированы так, что стрелки показывают на шкале именно среднее значение $\bar{j}$, $\bar{\varphi}$.

Из формул (12.4) и (12.5) следует, что максимальные значения силы тока и напряжения, достигаемые в цепи переменного тока, в $\sqrt{2}$ раз больше средних. Так, например, в цепи со средним напряжением 220 *в* максимальное мгновенное напряжение достигает ± 310 *в*.

Из соотношений (12.2), (12.4), (12.5) и формулы $\varphi_0 = Rj_0$ следует, что $\bar{\varphi} = R\bar{j}$ и $\bar{h} = \bar{\varphi} \cdot \bar{j}$, так что закон Ома и связь между мощностью, током и напряжением на сопротивлении справедливы для средних значений.

При прохождении переменного тока через емкость и индуктивность мы встретились с тем, что сила тока и напря-

жение меняются по кривым, которые сдвинуты одна относительно другой, хотя частота их одинакова. Рассмотрим мощность в общем случае произвольного сдвига фазы.

Пусть $j = j_0 \cos(\omega t + \beta)$, $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \beta + \alpha)$. Тогда
$$h(t) = j_0 \varphi_0 \cos(\omega t + \beta)\cos(\omega t + \beta + \alpha).$$

Воспользуемся известной формулой тригонометрии
$$\cos(\omega t + \beta + \alpha) = \cos(\omega t + \beta)\cos\alpha - \sin(\omega t + \beta)\sin\alpha.$$

Подставляя, получим:
$$\cos(\omega t + \beta)\cos(\omega t + \beta + \alpha) = \\ = \cos\alpha\cos^2(\omega t + \beta) - \sin\alpha\cos(\omega t + \beta)\sin(\omega t + \beta).$$

Так как $\overline{\cos^2(\omega t + \beta)} = 1/2$, а
$$\overline{\cos(\omega t + \beta)\sin(\omega t + \beta)} = \frac{1}{2}\,\overline{\sin(2\omega t + 2\beta)} = 0,$$
то
$$\overline{h} = j_0 \varphi_0 \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} = \overline{j}\overline{\varphi}\cos\alpha.$$

Таким образом, среднее значение мощности в общем случае, при наличии сдвига фаз α, пропорционально $\cos\alpha$. В частном случае сопротивления $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ мы возвращаемся к формуле (12.2).

В случае емкости $\alpha = -\pi/2$, $\cos\alpha = 0$, в случае индуктивности $\alpha = +\pi/2$, $\cos\alpha = 0$. Таким образом, в обоих случаях средняя мощность равна нулю. Этот результат вполне понятен физически. В емкости и индуктивности электрическая энергия не превращается в тепло, а только может запасаться. В цепи переменного тока на протяжении одной части периода емкость забирает из цепи электрическую энергию и запасает ее, во время другой части периода емкость отдает обратно свою энергию, работает на цепь. То же самое относится и к индуктивности, включенной в цепь переменного тока.

Обычный трансформатор, к которому не подключено никакой нагрузки, представляет собой чистую индуктивность (если пренебречь небольшими потерями в проводах). Через такой трансформатор течет ток с амплитудой $j = \varphi/L\omega$. Однако мощность из сети, как уже было сказано, не отбирается благодаря тому, что фаза $\alpha = \pi/2$, и $\cos\alpha = 0$. Интересно

отметить, что счетчики израсходованной электроэнергии устроены так, чтобы измерять именно величину $j\varphi \cos\alpha$. По этой причине трансформатор, включенный без нагрузки, практически ничего не прибавляет к Вашему счету за электроэнергию, а только увеличивает полный ток, текущий по проводам.

Если в сеть параллельно включено много индуктивностей (трансформаторы, электромоторы без нагрузки и т. д.), то полный ток может стать довольно большим, и тогда станут заметными потери в электропроводке. Этот эффект становится важным для электросетей в масштабе города.

§ 13. Колебательиый коитур в цепи перемеиного тока. Резоиаис иапряжеиий

Рассмотрим теперь включенные последовательно в цепь переменного тока сопротивление, индуктивность и емкость (рис. 204). Очевидно, что в этой системе ток, идущий через R, L, C, одинаков. Запишем его в виде

$$j = j_0 \cos(\omega t + \alpha). \tag{13.1}$$

Разность потенциалов в цепи $\varphi = \varphi_1 - \varphi_4 = \varphi_R + \varphi_L + \varphi_C$.

Рис. 204.

Припоминая формулы (11.2)—(11.4), получим:

$$\varphi = Rj_0 \cos(\omega t + \alpha) - L\omega j_0 \sin(\omega t + \alpha) + \frac{j_0}{C\omega} \sin(\omega t + \alpha) =$$
$$= Rj_0 \cos(\omega t + \alpha) + j_0 \left[\frac{1}{C\omega} - L\omega\right] \sin(\omega t + \alpha). \tag{13.2}$$

Из этой формулы видно, что разности потенциалов на индуктивности и на емкости имеют разные знаки, благодаря чему коэффициент при $\sin(\omega t + \alpha)$ есть разность двух членов. Запишем φ в виде

$$\varphi = b \cos(\omega t + \alpha + \beta). \tag{13.3}$$

Тогда b есть амплитуда разности потенциалов, т. е. наиболь-

шее значение разности потенциалов (напряжения). Для того чтобы найти b, перепишем (13.3) так:

$$\varphi = b\cos\beta\cos(\omega t+\alpha) - b\sin\beta\sin(\omega t+\alpha).$$

Сравнивая последнее выражение с (13.2), находим:

$$b\cos\beta = Rj_0, \quad b\sin\beta = j_0\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right). \tag{13.4}$$

Возводя равенства (13.4) в квадрат и складывая, получим:

$$b^2 = R^2 j_0^2 + j_0^2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2,$$

откуда

$$b = j_0\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \tag{13.5}$$

Из формулы (13.5) видно, что при данном значении амплитуды тока j_0 амплитуда напряжения b минимальна при

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}. \tag{13.6}$$

Записав (13.5) в виде $j_0 = \dfrac{b}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$, видим, что при данном значении амплитуды напряжения амплитуда тока максимальна, если выполнено условие (13.6). Условие (13.6) можно записать так: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Но это есть как раз собственная частота контура с данными L, C. Поэтому условие (13.6) есть условие резонанса, условие совпадения собственной частоты контура с частотой того переменного тока, который мы подаем. Отметим, что при резонансе напряжение в цепи равно

$$\varphi = Rj_0\cos(\omega t+\alpha). \tag{13.7}$$

Пользуясь (13.1), находим, что при резонансе

$$\varphi = Rj. \tag{13.8}$$

Перейдем к средним значениям. Средние значения величин тока и разности потенциалов определяем в соответствии с формулами (12.4) и (12.5). Из формулы $\varphi_L = L\omega j_0\sin(\omega t+\alpha)$

находим:

$$\bar{\varphi}_L = L\omega\bar{j} = \frac{L\omega}{R}\bar{\varphi}. \qquad (13.9)$$

Аналогично из формулы $\varphi_C = \frac{1}{C\omega} j_0 \sin(\omega t + \alpha)$ получим:

$$\bar{\varphi}_C = \frac{1}{C\omega}\bar{j} = \frac{\bar{\varphi}}{C\omega R}. \qquad (13.10)$$

Формулы (13.7) — (13.10) имеют место только в случае резонанса, т. е. при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Подставляя это значение ω в формулы (13.9) и (13.10), получим:

$$\bar{\varphi}_L = \bar{\varphi}_C = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\bar{\varphi}.$$

Поэтому в случае резонанса напряжение на индуктивности и на емкости тем больше, чем меньше сопротивление R, а величины $\bar{\varphi}_L$ и $\bar{\varphi}_C$ могут во много раз превышать напряжение источника переменного тока $\bar{\varphi}$.

При последовательном соединении складываются сопротивления. Но «сопротивления» емкости и индуктивности имеют противоположный знак и по-разному зависят от частоты. При резонансной частоте они равны по абсолютной величине и, следовательно, взаимно уничтожаются.

Таким образом, система из последовательно включенных R, L, C имеет при резонансе, $\omega = \omega_0$, *минимальное* сопротивление, пропускает наибольший ток при данной амплитуде переменного напряжения по сравнению с током при той же амплитуде напряжения, но частоте не в резонансе, $\omega \neq \omega_0$.

Интересно исследовать подробно, как меняются амплитуда напряжения и амплитуда силы тока, если мы отходим от точного резонанса, т. е. если мы рассматриваем $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Для того чтобы сделать это, поступим следующим образом. Пользуясь формулой (13.3), найдем, что $\bar{\varphi} = b/\sqrt{2}$, откуда $b = \sqrt{2}\,\bar{\varphi}$. Подставляя это значение в (13.5), получаем:

$$\bar{\varphi} = \frac{j_0}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2},$$

но $j_0/\sqrt{2}=\bar{j}$, поэтому

$$\bar{\varphi}=\bar{j}\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

Находя отсюда $\bar{j}$ и подставляя его в (13.9) и (13.10), получим:

$$\bar{\varphi}_L=\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2}}\bar{\varphi},\quad \bar{\varphi}_C=\frac{1}{C\omega}\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2}}\bar{\varphi}.$$

Обозначим через ω_0 собственную частоту контура. Тогда $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$. Последние формулы можно записать в виде

$$\bar{\varphi}_L=\frac{\omega^2}{\sqrt{\frac{R^2\omega^2}{L^2}+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\bar{\varphi},\quad \bar{\varphi}_C=\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\frac{R^2\omega^2}{L^2}+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\bar{\varphi}. \quad (13.11)$$

В таком виде ясна зависимость амплитуды от того, насколько близка собственная частота контура ω_0 к частоте переменного тока ω.

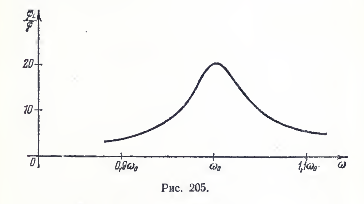


Рис. 205.

Отношение $\frac{\bar{\varphi}_L}{\bar{\varphi}}$ в зависимости от ω вблизи $\omega=\omega_0$ показано на рис. 205. График построен для случая $\frac{R}{L\omega_0}=0{,}05$. На графике виден типичный так называемый резонансный ход кривой.

Если $\frac{R}{L\omega}\ll 1$, то зависимость $\frac{\overline{\varphi}_L}{\overline{\varphi}}$ и $\frac{\overline{\varphi}_C}{\overline{\varphi}}$ от ω определяется главным образом вторым членом подкоренного выражения, т. е. величиной $(\omega_0^2-\omega^2)^2$. При $\omega=\omega_0$ этот член обращается в нуль, и при сделанном предположении $\left(\frac{R}{L\omega}\ll 1\right)$ знаменатель имеет минимум, а величина амплитуды максимальна. Амплитуда составляет 70% максимальной при $(\omega_0^2-\omega^2)^2=$ $=\frac{R^2\omega^2}{L^2}$, т. е. при $\omega_0^2-\omega^2=\pm\frac{R\omega}{L}$, откуда

$$\omega_0-\omega=\pm\frac{R}{L}\frac{\omega}{\omega_0+\omega}\approx\pm\frac{R}{2L}.$$

То изменение частоты, при котором квадрат амплитуды падает вдвое по сравнению со своим максимальным значением, называется шириной резонанса. Если амплитуда составляет 70%, т. е. 0,7 от максимальной, то квадрат амплитуды составляет $0{,}7^2\approx 0{,}5$ от максимального. Поэтому ширина резонансной кривой $\omega-\omega_0$ есть $R/2L$, т. е. ширина равна величине, характеризующей скорость затухания колебаний в таком контуре (см. § 9).

Следовательно, чем меньше сопротивление R, тем меньше ширина резонанса, тем круче идет кривая вблизи $\omega=\omega_0$. Из формул (13.11) видно, что величина максимума $\frac{\overline{\varphi}_L}{\overline{\varphi}}$ тем больше, чем меньше R. Поэтому явление резонанса особенно сильно, если R мало.

§ 14. Параллельное включение индуктивности и емкости. Резонанс токов

Рассмотрим схему рис. 206, отличающуюся от схемы рис. 204 тем, что L и C включены параллельно. Сопротивление цепи считаем весьма малым и пренебрегаем им. В этом случае φ_C и φ_L одинаковы и равны напряжению в цепи (т. е. в источнике переменного тока) φ, а ток j складывается из тока j_C, текущего через C, и тока j_L, текущего через L. Пусть $\varphi_L=\varphi_C=\varphi=\varphi_0\cos(\omega t+\alpha)$. Пользуясь формулами § 11, найдем

$$j_C=-C\omega\varphi_0\sin(\omega t+\alpha),\qquad j_L=\frac{\varphi_0}{L\omega}\sin(\omega t+\alpha).$$

Поэтому

$$j = j_C + j_L = \varphi_0 \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \sin(\omega t + \alpha).$$

Отсюда, полагая $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

$$\overline{j} = \overline{\varphi} \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \text{ или } \overline{\varphi} = \frac{\overline{j}}{\frac{1}{L\omega} - C\omega} = \frac{\omega \overline{j}}{C(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

В этом случае также проявляется типичная резонансная зависимость: при данной силе тока $\overline{j}$ напряжение $\overline{\varphi}$ тем больше, чем ближе ω к ω_0. Легко убедиться, что при ω, близком к ω_0, $\overline{j_L}$ и $\overline{j_C}$ гораздо больше, чем $\overline{j}$ цепи, т. е., по существу, в контуре, состоящем из L и C, происходят сильные колебания. При этом достаточно малого внешнего тока для того, чтобы поддерживать гораздо более сильные токи в контуре.

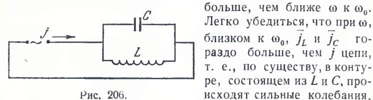


Рис. 206.

При параллельном соединении, как известно, складываются проводимости, т. е. величины, обратные сопротивлениям,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

«Проводимости» (т. е. отношения тока к разности потенциалов) у емкости и индуктивности имеют противоположный знак и по-разному зависят от частоты. При резонансе ($\omega = \omega_0$) они взаимно уничтожаются и общая проводимость наименьшая, т. е. ток наименьший при данной разности потенциалов, а следовательно, разность потенциалов φ_{AB} наибольшая при данном токе во внешней цепи.

В упрощенной схеме без сопротивления амплитуда колебаний неограниченно растет при приближении ω к ω_0. В действительности включенное в схему сопротивление приводит к тому, что амплитуда конечна при $\omega = \omega_0$.

Если включить R параллельно L и C, то все расчеты становятся очень похожими на расчеты предыдущего параграфа. Но этот случай редко встречается в практике. В дейст-

вительности индуктивность обычно имеет заметное сопротивление, поэтому типичной является схема рис. 207. В этом случае расчеты несколько более длинны, чем в предыдущем параграфе, и мы не будем приводить их в подробностях. Результат расчетов (при ω, близком к ω_0, и при малом $R/L\omega$) дает: $\frac{\bar{I}_L}{\bar{I}} \approx \frac{\bar{I}_C}{\bar{I}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(R\omega/L)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$. Таким образом, оказывается, что усиление тока при резонансе в цепи с параллельным включением подчиняется тому же закону, что и усиление напряжения при последовательном включении, рассмотренное в предыдущем параграфе.

В предыдущем параграфе мы получили формулу для ширины резонанса $\omega - \omega_0 = R/2L$, которая показывает, что чем медленнее затухают колебания, тем меньше ширина резонанса. Этот факт имеет место не только для электрических колебаний. Рассмотрим любую систему, в которой могут происходить колебания. Пусть некоторая внешняя сила вызвала колебания в такой системе и после перестала действовать. Система оказалась предоставленной самой себе. После этого колебания начинают затухать. При этом если амплитуда колебаний пропорциональна $e^{-\gamma t}$, то скорость затухания можно характеризовать величиной γ. Эта величина имеет размерность $1/сек$. За время $\tau = 1/\gamma$ амплитуда убывает в e раз, т. е. на 63%.

Рис. 207.

Теперь рассмотрим раскачку такой системы периодической внешней силой. Амплитуда колебаний в данный момент есть сумма амплитуд, приобретенных за все время раскачки. При наличии затухания амплитуда, приобретенная давно, слишком рано успевает затухнуть, не играет роли, не вносит заметного вклада в амплитуду колебаний в данный момент.

Время затухания, очевидно, равно $1/\gamma$; за это время амплитуда свободных колебаний успевает уменьшиться в e раз, т. е. на 63%. Следовательно, даже в том случае, когда раскачивающая сила действует непрерывно, от $t = -\infty$, все равно амплитуда колебаний определяется лишь интервалом

времени от $t - 1/\gamma$ до t, где t — момент наблюдения; действие силы в более ранний период успевает затухнуть.

Для того чтобы сильно проявилось различие между двумя периодическими силами с несколько различными периодами, $F_0 \sin \omega_0 t$ и $F_0 \sin \omega t$, нужно такое время наблюдения T, за которое их фазы разойдутся приблизительно на π единиц: $\omega T = \omega_0 T \pm \pi$, так что $|\omega - \omega_0| = \pi/T$. Следовательно, если колебания системы «помнят» только действие силы за время $T = 1/\gamma$, то у такой системы различие в частотах возбуждающей силы, меньшее $|\omega - \omega_0| < \pi/T = \pi\gamma$, мало повлияет на амплитуду. Отсюда видно, что ширина резонансной кривой пропорциональна затуханию γ.

С другой стороны, так как система «помнит» и собирает воздействие силы за время $1/\gamma$, то сама амплитуда в резонансе — а значит, и высота резонансной кривой — обратно пропорциональна γ. Расчеты подтверждают эти соображения.

§ 15. Ток смещения и электромагнитная теория света

Выше везде мы почти без оговорок рассматривали ток, идущий через конденсатор. Действительно, если включить конденсатор в цепь переменного тока последовательно с амперметром, то амперметр покажет вполне определенную силу тока $\bar{j} = C\omega\bar{\varphi}$. С другой стороны, через конденсатор ток не идет: пластины конденсатора разделены изолятором (например, между ними пустота), поэтому те индивидуальные носители электричества — электроны, которые находятся в левом проводе и на левой пластине, никогда не попадут на правую пластину и правый провод. Следовательно, в пространстве между пластинами не движутся заряженные частицы, т. е. нет электрического тока в том смысле, как мы понимали ток до сих пор. В этом пространстве есть только электрическое поле, которое изменяется, когда меняется заряд пластин, т. е. когда в левом и правом проводниках течет ток. Теперь возникают две возможности:

1) либо надо извиниться перед читателем, сказав, что везде, где говорилось о токе через емкость, мы выражались неточно, на самом деле тока нет, ток течет только в проводах слева и спрва;

2) либо надо принять следующие допущения. Когда в проводах слева и справа течет ток, то в пространстве между пластинами обязательно меняется электрическое поле. Значит, переменное электрическое поле нужно рассматривать наравне с обычным током — движением заряженных частиц. Максвелл, высказавший эту точку зрения, сумел из нее получить грандиозные следствия.

Давно было известно, что электрический ток, т. е. движение заряженных частиц, вызывает появление *магнитного поля*. Но если переменное электрическое поле подобно электрическому току, то переменное электрическое поле в пустоте тоже должно создавать магнитное поле. Эта гипотеза Максвелла привела к замечательной симметрии между

электрическим и магнитным полями. Фарадей экспериментально открыл индукцию, т. е. тот факт, что изменение магнитного поля вызывает появление электрического поля. Максвелл умозрительно пришел к предположению о существовании аналогичного явления, при котором изменение электрического поля вызывает появление магнитного поля. Только после этого предположения теория электрических и магнитных полей приобрела современный вид.

Математически теория Максвелла записывается в виде дифференциальных уравнений, которые слишком сложны для нашей книги, и мы их приводить не будем. Решения этих уравнений описывают распространение в пустоте электрических и магнитных полей. При этом обязательно должны иметь место оба поля: изменение электрического поля вызывает магнитное поле, изменение магнитного поля вызывает электрическое поле.

Ко времени, когда работал Максвелл, уже были сделаны опыты Фарадея, известна была связь между переменным магнитным полем и индуцируемой им э. д. с. Известно было магнитное поле тока. Наконец, известна была связь между зарядом конденсатора и электрическим полем между его пластинами. Этих данных достаточно для того, чтобы написать уравнения для полей в пустоте.

Максвелл нашел скорость распространения полей в пустоте. Эта скорость оказалась равной скорости света! Отсюда, естественно, следовало предположение, что свет и есть не что иное, как электромагнитные колебания. Далее теория предсказывала возможность существования электромагнитных колебаний любой длины волны, в том числе и рентгеновых лучей (длина которых в тысячи раз меньше длины световой волны) и радиоволн с большой длиной волны. Так работы Фарадея и Максвелла начали тот путь, который завершился открытием радиоволн Герцем и изобретением радио как средства связи нашим соотечественником А. С. Поповым.

§ 16. Нелинейное сопротивление и туннельный диод

Рассмотрим двухполюсник — «ящик», похожий на сопротивление в том отношении, что сила тока, проходящего через ящик, зависит только от мгновенного значения разности потенциалов. В этом отношении ящик не похож ни на индуктивность, где φ зависит от $\frac{dj}{dt}$, ни на емкость, где φ зависит от $\int j\,dt$. Однако от обычного сопротивления ящик отличается тем, что зависимость $j(\varphi)$ отличается от закона Ома, $j=\varphi/R$; у «ящика» зависимость $j(\varphi)$ более сложная. Эта функция $j(\varphi)$ называется *характеристикой* ящика.

Единственное общее утверждение, которое можно сделать про $j(\varphi)$, что φ и j не могут быть разного знака, если внутри «ящика» не спрятаны батареи или другие источники энергии. Если φ и j одного знака, то при прохождении тока энергия внутри «ящика» *поглощается*, «ящик» отбирает электрическую энергию от той цепи, в которую он включен; в «ящике» эта энергия превращается в тепловую и рассеивается. Так как φ непрерывно и $\varphi<0$ при $j<0$ и $\varphi>0$ при $j>0$, то

при $j=0$ $\varphi=0$. В остальном зависимость $j(\varphi)$ может быть любой. Например, в качестве выпрямителей тока применяются «ящики», характеристика которых показана на рис. 208: в одну сторону ток течет легко при малой разности потенциалов, в другую сторону ток почти не идет; как видно из графика, даже при большой отрицательной разности потенциалов ток мал. Такими свойствами обладают так называемые диоды, изготовляемые из двух полупроводников. В 1958 г. в Японии удалось сделать из специально подобранных полупроводников «ящик», так называемый туннельный диод (в действительности этот «ящик» представляет собой миниатюрный цилиндрик, диаметр и высота которого несколько миллиметров), с необычной кривой $j(\varphi)$ с минимумом (см. рис. 209, на котором даны типичные значения φ и j). Такая кривая не противоречит высказанному принципу, знак φ везде тот же, что и знак j, так что «ящик» только поглощает энергию. Мы не будем входить в рассмотрение физических причин такой странной кривой, но зато рассмотрим следствия для цепи, в которую включен туннельный диод. Для краткости будем называть его и дальше просто «ящик».

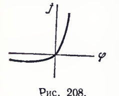


Рис. 208.

Начнем с наиболее простой цепи, состоящей из трех частей: батарея с э. д. с. E — сопротивление R (обычное, подчиняющееся закону Ома) — «ящик» (рис. 210). Внутреннее сопротивление батареи включим в R.

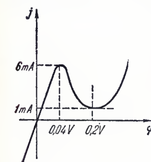


Рис. 209.

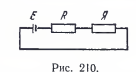


Рис. 210.

Рис. 211.

Уравнение, определяющее ток и распределение потенциала в цепи, имеет вид $-E+Rj(\varphi)+\varphi=0$, где φ — разность потенциалов на «ящике», $j(\varphi)$ есть функция, определяемая свойствами «ящика» (см. рис. 209). Ток через R равен току через «ящик», поэтому $\varphi_R=Rj=Rj(\varphi)$. Это уравнение удобно решить графически. Запишем его так: $\varphi=E-Rj(\varphi)$, и построим в плоскости φ, j прямую $\varphi=E-Rj$. Эту прямую можно назвать «нагрузочной линией» системы батарея — сопротивление. Решение задачи дается пересе-

чением прямой $\varphi = E - Rj$ $\left(\text{при } j = \frac{E-\varphi}{R}\right)$ с линией $j(\varphi)$ — характеристикой «ящика». На рис. 211 показано такое графическое решение задачи, притом для одной батареи и трех разных сопротивлений: малого R_1, среднего R_2 и большого R_3.

Из графика видно, что при достаточно большом E можно подобрать такое R — не слишком малое и не слишком большое, при котором есть три точки пересечения A, B, C — три решения!

Необходимое условие для существования трех решений — наличие падающего участка кривой $j(\varphi)$. Ясно, что линия, на которой везде

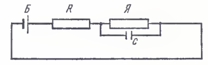


Рис. 212

$\frac{dj}{d\varphi} > 0$, может только один раз пересечься с нагрузочной прямой, каковы бы ни были E и $R > 0$.

Рассмотрим теперь несколько усложненную схему с емкостью, включенной параллельно «ящику» (рис. 212). Для такой схемы получим, что ток через «ящик» $j(\varphi)$ и ток через емкость $C\frac{d\varphi}{dt}$ в сумме равны току через сопротивление $j(\varphi) + C\frac{d\varphi}{dt} = \frac{E-\varphi}{R}$. Отсюда $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{C}\left[\frac{E-\varphi}{R} - j(\varphi)\right]$. Точки пересечения характеристики «ящика» $j(\varphi)$ с нагрузочной линией $\frac{E-\varphi}{R}$ соответствуют решениям $\varphi = \text{const}$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Посмотрим знак $\frac{d\varphi}{dt}$ около этих точек. Легко убедиться, глядя на рис. 211, что

при $\varphi < \varphi_A$ $\quad \frac{d\varphi}{dt} > 0$, $\qquad$ при $\varphi_B < \varphi < \varphi_C$ $\quad \frac{d\varphi}{dt} > 0$,

при $\varphi_A < \varphi < \varphi_B$ $\quad \frac{d\varphi}{dt} < 0$, $\qquad$ при $\varphi > \varphi_C$ $\quad \frac{d\varphi}{dt} < 0$.

На рис. 213 показано стрелками направление изменения φ со временем. Следовательно, среднее решение B неустойчиво: стоит от него немного отойти влево или вправо, и появляется $\frac{d\varphi}{dt}$ такого знака, что отклонение φ от φ_B увеличивается!

A и C представляют собой два устойчивых решения, которым соответствуют устойчивые состояния системы.

Наличие двух устойчивых состояний позволяет применять такие «ящики» в математических машинах, как ячейки памяти: сделав много таких цепей и переводя внешним воздействием одни в состояние A, другие в состояние C, мы можем «записать», «запомнить» какое угодно число или другую информацию. С помощью таких систем любую информацию мы записываем шифром вида $AACACACCC\ \ldots$, где каждая буква A или C означает состояние, в котором находится соответствующая система (1-я в A, 2-я в A, 3-я в C, 4-я в A и т. д.).

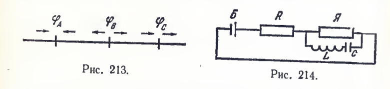


Рис. 213.

Рис. 214.

Рассмотрим теперь систему (рис. 214), состоящую из индуктивности и емкости, включенных параллельно «ящику». Снова обозначаем φ разность потенциалов на «ящике», $j(\varphi)$ его характеристику; ток, текущий через L и C, обозначим j_1:

$$j(\varphi)+j_1=\frac{E-\varphi}{R}, \quad C\frac{d\varphi_C}{dt}=j_1, \quad \varphi-\varphi_C=\varphi_L=L\frac{dj_1}{dt}.$$

Рассмотрим процесс в контуре, когда ток и потенциал в «ящике» близки к средней точке пересечения B. Пусть

$$\varphi=\varphi_B+f, \quad \varphi_C=\varphi_B+g, \quad j=i(\varphi_B)+f\left.\frac{dj}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_B}=j(\varphi_B)+kf,$$

где k есть сокращенное обозначение производной $\frac{dj}{d\varphi}$ при $\varphi=\varphi_B$. Силу тока мы представили первыми двумя членами ряда Тейлора, средний потенциал емкости равен φ_B, причем φ_B и $j(\varphi_B)$ удовлетворяют условию $j(\varphi_B)=\frac{E-\varphi_B}{R}$. Подставляя эти выражения в уравнения, получим после сокращений:

$$kf+j_1=-\frac{1}{R}f, \qquad C\frac{dg}{dt}=j_1, \quad f-g=L\frac{dj_1}{dt}. \qquad (16.1)$$

Из этих уравнений получим: $f=-\frac{1}{\frac{1}{R}+k}j_1=-rj_1$, где $\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+$ $+k=\frac{1}{R}+\left.\frac{dj}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_B}$. Из уравнений (16.1) найдем $L\frac{d^2j_1}{dt^2}=\frac{df}{dt}-\frac{dg}{dt}=$ $=-r\frac{dj_1}{dt}-\frac{1}{C}j_1$, и окончательно

$$\frac{d^2j_1}{dt^2}+\frac{r}{L}\frac{dj_1}{dt}+\frac{1}{LC}j_1=0.$$

Последнее уравнение представляет собой обычное уравнение колебательного контура с емкостью C, индуктивностью L и сопротивлением r.

Сопротивление r соответствует тому, что емкость и индуктивность замкнуты параллельно двумя цепями: цепью батареи с сопротивлением R и «ящиком» с сопротивлением $\frac{1}{k}=\frac{d\varphi}{dj}$. Так как эти две цепи включены параллельно, то складываются проводимости, т. е. величины, обратные сопротивлениям, откуда и следует выражение для r.

Токи и потенциалы в системе распадаются на сумму двух слагаемых: постоянного слагаемого φ_B, $j(\varphi_B)$ и колебательного слагаемого $j_1(t)$, $f(t)$, $g(t)$. При этом для колебательного слагаемого роль сопротивления «ящика» играет производная $\frac{d\varphi}{dj}$, взятая по характеристике «ящика». Будь в ящике обычное омическое сопротивление, $\varphi=Rj\left(\frac{d\varphi}{dj}=R\right)$, производная и равнялась бы величине сопротивления.

К чему приводит необычная характеристика $j(\varphi)$ «ящика» — туннельного диода (рис. 211)? В точке B производная $\frac{dj}{d\varphi}<0$, т. е. по отношению к колебаниям «ящик» имеет отрицательное сопротивление! Более того, из рис. 211 видно, что в точке пересечения $|k|=\left|\frac{dj}{d\varphi}\right|>\frac{1}{R}$, так как $\frac{1}{R}$ — это как раз угловой коэффициент нагрузочной прямой $j=\frac{E-\varphi}{R}$, пересекающей характеристику в точке B. Следовательно, суммарное сопротивление колебательного контура

$$r=\frac{1}{R}+k<0.$$

Уравнение для колебательного контура с L, C, r при $r>0$ давало затухающие колебания. При $r<0$ это уравнение даст раскачивающиеся, усиливающиеся с течением времени колебания.

Таким образом, с помощью туннельного диода можно генерировать (возбуждать) в контуре колебания.

Способность к возбуждению колебаний является следствием неустойчивости точки B. Энергия колебаний черпается от батареи. Амплитуда колебаний растет со временем по показательному закону лишь до тех пор, пока можно считать ее малой и пользоваться разложением в ряд Тейлора характеристики $j(\varphi)$ около точки B. Максимальная амплитуда, грубо говоря, ограничивается точками A и C рис. 211. Уже к 1961 году были испытаны генераторы с к. п. д. до 25% при мощности 0,5 милливатта при частоте 7500 мегациклов (длина волны 4 *см*). Для нас цепи с туннельным диодом интересны с точки зрения математического рассмотрения нелинейной задачи, вопросов мощности устойчивости решений и представления токов в системе как наложения постоянного решения и колебаний.

ДОБАВЛЕНИЕ

ЗАМЕЧАТЕЛЬНАЯ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА

§ 1. Различные способы определения функции

Те функции, которые мы изучали до сих пор, обычно задавались с помощью формул. Это значит, что задавался способ вычисления значений функции при любом заданном значении независимой переменной. Такое задание можно назвать алгоритмическим (алгоритм — способ вычисления). Ведь $y=f(x)=2x+3x^2$ значит: «возьми x, умножь на 2, возведи x в квадрат, умножь на 3, сложи два полученных числа, получишь значение y при данном x». Иначе определялись тригонометрические функции — с помощью геометрических понятий, измерения дуг и отрезков в круге.

Нашей задачей раньше было изучение свойств функций, заданных таким образом, изучение закона их возрастания и убывания, максимумов и минимумов и т. д. Изучение этих свойств приводит к новым способам определения функций. Так, например, функцию $f=e^x$ можно определить как такую функцию, производная которой равна самой функции:

$$\frac{df}{dx}=f$$

при дополнительном условии $f(0)=1$. Синус, т. е. функцию $\varphi=\sin x$, и косинус, т. е. $\psi=\cos x$, можно определить как функции, удовлетворяющие одному и тому же уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\varphi, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2}=-\psi,$$

но различным начальным условиям

$$\varphi(0)=0, \ \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_0=1; \qquad \psi(0)=1, \ \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_0=0.$$

Эти определения оказываются во многих отношениях более «по существу», более тесно связанными с применениями показательной функции и тригонометрических функций ко многим задачам физики, например к задачам колебаний, по сравнению с определениями $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и определениями синуса и косинуса в круге.

Любопытно, что определения e^x, $\sin x$, $\cos x$ с помощью дифференциальных уравнений оказываются удобными для электронных вычислительных машин. Если по ходу расчета вычислитель должен подставлять в формулу значения e^x при различных x, то он кладет перед собой таблицу и выписывает из нее нужные e^x. При работе на машине оказывается легче и быстрее не обращаться к таблице, а вычислять на машине значения функции e^x шаг за шагом по приближенной формуле $e^{(x+\Delta x)} = e^x (1 + \Delta x)$ в соответствии с уравнением (или по более точным формулам, основанным на том же уравнении). То же относится и к функциям $\sin x$ и $\cos x$; их удобно вычислять заодно *):

$$\sin (x+\Delta x) = \sin x + \Delta x \cos x, \quad \cos (x+\Delta x) = \cos x - \Delta x \sin x.$$

Итак, один общий подход к понятию функции заключается в задании способа ее вычисления и последующем исследовании такой функции. Возможен и другой подход: можно искать функцию с определенными общими свойствами, с тем чтобы потом на основании этих свойств попытаться найти ту формулу, которая описывает интересующую нас функцию. Такая процедура всегда применяется при обработке экспериментальных данных и при подборе эмпирических (т. е. основанных на опыте) формул для описания явления. Здесь же наша цель — построить таким способом одну замечательную функцию, полезную и важную как для самой математики, так и для ее применений.

§ 2. Дирак и его функция

Поль Адриен Морис Дира́к — крупнейший английский физик-теоретик — прославился в 1929 году. Он строил такую теорию, которая описывала бы движение электронов в электрических и магнитных полях с любой скоростью, вплоть до скорости, близкой к скорости света. Речь идет о квантовой теории, которая объясняет также тот факт, что в атоме электроны могут двигаться только по определенным орбитам, с определенными значениями энергии. Дирак знал, что электрон обладает определенным моментом вращения, т. е. подобен вращающемуся волчку, и учитывал это при создании своей теории. Когда же теория была им создана, оказалось, что из нее следует еще и вывод, не предусмотренный Дираком: возможно существование частиц с такой же массой, как электроны, но с противоположным (положительным) знаком заряда. В течение двух лет считали, что теория Дирака хороша для описания движения электрона, а вывод о частицах с положительным зарядом ошибочен, и когда от него удастся избавиться, теория станет совсем отличной.

Но в 1932 году частицы с положительным зарядом — позитроны, или, как их еще называют, античастицы электрона, были открыты! Их появление в теории из недостатка превратилось в триумф, в главное достижение теории: открытие Дирака было первым примером

*) Продумайте, откуда получаются эти формулы, и проверьте, согласуются ли они с уравнением для второй производной синуса и косинуса.

появления новых частиц «на острие пера теоретика». Этот пример поучителен с точки зрения взаимоотношений опыта и теории: теория основывается на определенных данных опыта, но последовательное логическое и математическое развитие теории выводит за пределы того материала, который был положен в ее основу, приводит к новым предсказаниям.

Дирак является не только одним из лучших физиков-теоретиков нашей планеты, но и замечательным математиком. В своем классическом труде «Принципы квантовой механики» Дирак ввел и широко использовал новую функцию, которой он дал обозначение $\delta(x)$: читается «дельта-функция» или «дельта-функция Дирака» *).

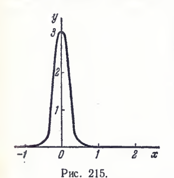


Рис. 215.

Дельта-функция определяется следующим образом: $\delta(x)=0$ при любом $x \neq 0$, т. е. при $x<0$ и при $x>0$. При $x=0$, $\delta(0)=\infty$. Кроме того, задается условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1. \tag{2.1}$$

Наглядно можно представить себе график функции, похожей на $\delta(x)$, как показано на рис. 215. Чем более узкой мы сделаем полоску между левой и правой ветвью, тем выше должна быть эта полоска, для того чтобы площадь полоски (т. е. интеграл) сохраняла свое заданное значение, равное 1. При сужении полоски мы приближаемся к выполнению условия $\delta(x)=0$ при $x \neq 0$, функция приближается к дельта-функции. В одном из следующих параграфов эти соображения будут использованы для построения формул, дающих дельта-функцию. Здесь же продолжим исследование ее общих свойств.

Важнейшая формула интеграла с $\delta(x)$ имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0). \tag{2.2}$$

В самом деле, так как $\delta(x)=0$ при $x \neq 0$, то значение интеграла не зависит от значений $f(x)$ ни при каком $x \neq 0$. Существенно только значение $f(x)$ там, где $\delta \neq 0$, т. е. при $x=0$. Значит, в той узкой области, где $\delta(x) \neq 0$ (рис. 215), $\delta(x)$ умножается на $f(0)$. Следовательно, из условия (2.1) получается формула (2.2). Все эти рассуждения можно провести в обратном порядке, т. е. можно сказать, что $\delta(x)$ есть такая функция, для которой при любом виде вспомогательной функции $f(x)$ имеет место формула (2.2). Это одно условие при-

*) Математическое обоснование таких так называемых обобщенных функций дал академик С. Л. Соболев.

водит ко всем заключениям о виде $\delta(x)$, которые были раньше использованы для ее определения. Из формулы (2.2) следует и то, что $\delta(x)=0$ при $x \neq 0$, и то, что*) $\int \delta(x)\,dx=1$, и то, что $\delta(0)=\infty$.

Приведем еще несколько очевидных следствий из определения $\delta(x)$. По общему правилу замены переменных (особенно подробно оно было изложено в главе IV, § 7) функция $\delta(x-a)$ смещена на a единиц вправо по сравнению с $\delta(x)$, т. е. $\delta(x-a)=\infty$ при $x=a$. Соответственно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx=f(a).$$

Далее, легко убедиться, рассматривая сперва кривую вида рис. 215, что $b\delta(x)$ в b раз выше, чем $\delta(x)$, а $\delta(cx)$ в $|c|$ раз уже, чем $\delta(x)$, так что площадь под кривой $\delta(cx)$ в $|c|$ раз меньше, чем площадь $\delta(x)$. Поэтому

$$\int f(x)\,b\delta(x)\,dx=bf(0), \tag{2.3}$$

$$\int f(x)\,\delta(cx)\,dx=\frac{1}{|c|}f(0), \tag{2.4}$$

и можно сказать, что $\delta(cx)=\frac{1}{|c|}\delta(x)$. Формула (2.3) совершенно очевидна, но можно надеяться, что для читателя, прошедшего через испытание всеми предыдущими главами книги, будет сразу понятна и формула (2.4). Ее легко получить формально заменой переменных

$$y=|c|\,x,\quad dx=\frac{1}{|c|}\,dy.$$

Здесь мы используем еще тот факт, что $\delta(x)$, определяемая формулой (2.1), является четной функцией своего аргумента: $\delta(x)=\delta(-x)$.

Упражнения

1. Показать, что для функции $\varphi(x)$, имеющей единственный нуль x_0, так что $\varphi(x_0)=0$, имеет место формула $\delta(\varphi(x))=\frac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x-x_0)$. Для функции ψ с несколькими нулями $\delta(\psi(x))$ равно сумме таких выражений по всем нулям.

2. Чему равен $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,\delta(\sin x)\,dx$?

---

*) Интеграл без обозначения пределов интегрирования здесь будет всегда пониматься распространенным по интервалу изменения переменной интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$.

§ 3. Разрывные фуикции и их производные

Рассмотрим интеграл функции $\delta(x)$ в завнсимости от его верхнего предела, т. е. фуикцию

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(z)\,dz. \tag{3.1}$$

Легко убедиться, что график этой функции имеет вид «ступеньки» (рнс. 216). Пока $x < 0$, область интегрирования в формуле (3.1) целиком находится там, где $\delta(x) = 0$. Следовательно, $\theta(x) = 0$ $(x < 0)$. Если же $x > 0$, то при интегрированни включается окрестность начала координат, где $\delta(0) = \infty$. С другой стороны, так как прн $x > 0$ также $\delta(x) = 0$, то значение интеграла не изменяется, когда верхчий предел меняется от $+0{,}1$ до 1, или до 10, или до ∞. Следовательно, при $x > 0$

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1,$$

как и показано на рис. 216.

Такнм образом, с помощью дельта-функции сконструирована простейшая разрывная функция $\theta(x)$ такая, что при $x < 0$, $\theta(x) = 0$, а в области $x > 0$, $\theta(x) = 1$. Ясно, что при $x = 0$, θ терпнт разрыв от 0 до 1. Эти простые соображения позволяют более последовательно, без кажущихся исключений и многословных оговорок подойти к вопросу о производной от функции, имеющей разрывы.

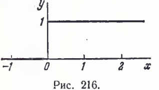


Рис. 216.

Не зная дельта-функцнн, приходится говорить, что производные нельзя находить там, где функция разрывна. Но вот мы построили разрывную функцию $\theta(x)$. Общее правило о связи между интегралом и производной имеет вид:

$$\text{если } F(x) = \int_{x_0}^{x} g(z)\,dz, \quad \text{то} \quad g(x) = \frac{dF}{dx}.$$

Применим его к выражению (3.1), получим

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x). \tag{3.2}$$

Значнт, для производной разрывной функции не надо делать исключений: просто в точке разрыва производная равна «особенной» функцнн — дельта-фупкцни. Научившись справляться с производной простейшей разрывной функции, можно запросто находить производные в более сложных случаях. Приведем несколько примеров. Пусть

$$y = x, \quad x < 1; \qquad y = x - 2, \quad x > 1. \tag{3.3}$$

График функции см. на рис. 217. Разрыв имеет место при $x=1$. Величина разрыва $y(1+0)-y(1-0)=-2$. Мы пользуемся здесь обозначением $y(1+0)$ — это предельное значение y при приближении x к 1 справа (со стороны $x>1$), $y(1-0)$ — то же слева (см. рис. 217). Отсюда получаем, что

$$\frac{dy}{dx}=1-2\delta(x-1). \quad (3.4)$$

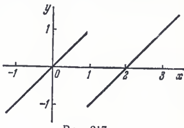


Рис. 217.

Такая запись лучше унылого утверждения, что $\frac{dy}{dx}=1$ везде, кроме точки $x=1$, где функция терпит разрыв и не имеет производной.

Дельта-функция это типичное дитя XX века. Прошлому XIX веку свойственно было пристрастие облекать многие свои суждения — и правильные, и ложные, и не совсем правильные — в форму «невозможностей». Невозможно изобрести вечный двигатель, невозможно доказать реальное существование атомов, невозможно определить состав звезд, невозможно найти производную разрывной функции. Наш XX век находит много конструктивных решений для того, что казалось невозможным в XIX веке; так, в частности, дельта-функция решает вопрос о производной в точке разрыва (во всяком случае, для разрыва, имеющего вид конечного скачка). В самом деле, ведь в записи (3.4) в одной строчке уже содержится и факт разрыва (раз вошла δ), и место его ($x=1$), и величина [коэффициент (-2) при δ].

Интегрируя (3.4) с условием $x=0$, $y=0$, можно полностью восстановить график $y(x)$. Правда, в случае функции (3.3) нам «повезло», другими словами, был выбран специально простой случай, когда слева и справа производная выражается одной формулой. Это, конечно, не обязательно — с чего бы производной быть непрерывной, если сама функция терпит разрыв.

Рассмотрим более сложный пример: $y=-x^2$, $x<1$; $y=x^2$, $x>1$. При $x<1$, $y'=-2x$, при $x>1$, $y'=+2x$. Разрыву соответствует $y'=2\delta(x-1)$. Теперь мы по произволу можем точку $x=1$ присоединить к левой области и тогда написать $y'=-2x+2\delta(x-1)$, $x\leqslant 1$; $y'=+2x$, $x>1$. Либо — другой вариант — можно присоединить $x=1$ к правой области и тогда с равным правом запишем $y'=-2x$, $x<1$; $y'=2x+2\delta(x-1)$, $x\geqslant 1$. Обратите внимание на то, как расставлены знаки $<$ (меньше) и $\leqslant$ (меньше или равно), $>$ (больше) и $\geqslant$ (больше или равно) в формулах. Нужно следить за тем, чтобы не записать дельта-функцию дважды *). Можно написать также

$$y'=\varphi(x)+2\delta(x-1), \quad \text{где} \quad \varphi(x)=\begin{cases} -2x \ (x<1), \\ 2x \ (x>1). \end{cases}$$

*) Для самой разрывной функции нет смысла спрашивать, чему она равна в самой точке разрыва; во всяком случае, этот вопрос является бессмысленным почти во всех прикладных задачах.

Чтобы проверить запись, проинтегрируйте выражение производной и получите снова исходную разрывную функцию.

Иногда применяют так называемую *знаковую функцию* *) $\operatorname{Sgn}(x)$. Она определяется так, что $\operatorname{Sgn}(x) = -1$ при $x < 0$ и $\operatorname{Sgn}(x) = +1$ при $x > 0$. Можно записать $\operatorname{Sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$, где $|x|$ — модуль, т. е.

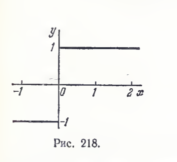


Рис. 218.

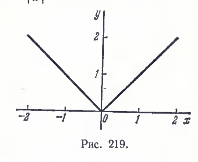


Рис. 219.

абсолютное значение x. График $\operatorname{Sgn} x$ показан на рис. 218. Легко убедиться, что

$$\operatorname{Sgn} x = -1 + 2\theta(x) = 1 + 2\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,dx. \qquad (3.5)$$

Рассмотрим далее саму функцию $|x|$. График ее — на рис. 219. Найдем производные этой функции: $\frac{d|x|}{dx} = -1, x < 1$; $\frac{d|x|}{dx} = +1$, $x > 1$ или кратко, с помощью новой функции, которую мы узнали,

$$\frac{d|x|}{dx} = \operatorname{Sgn} x.$$

Далее, из формулы (3.5) следует, что

$$\frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x).$$

Это очень важная формула, которую надо прочувствовать. Ведь мы знаем, что вторая производная связана с кривизной линии на графике и равна нулю для прямой. Казалось бы, если график $|x|$ состоит из двух прямых, на каждой $\frac{d^2|x|}{dx^2} = 0$, почему не сказать просто, что $\frac{d^2|x|}{dx^2}$ равно нулю везде? Понятно, что дело тут в изломе

*) Sgn — сокращенное обозначение латинского слова signum, знак.

в точке $x=0$, где сходятся две прямые. Но как убедиться в том, что излом соответствует именно выражению второй производной $2\delta(x)$? Для этого давайте скруглим излом: возьмем функцию $y_1=+\sqrt{x^2+a^2}$. Эта функция тем ближе к ломаной $y=|x|$, чем меньше a (рис. 220). Легко найдем $\frac{dy_1}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. На рис. 221 представлен график $\frac{d^2y_1}{dx^2}$ (оба рис. 220 и 221 построены для $a=0,5$).

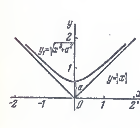


Рис. 220.

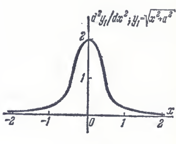


Рис. 221.

Легко убедиться, что этот график становится все выше и у́же при уменьшении a, интеграл $\int \frac{d^2y_1}{dx^2}\,dx=2$, откуда в пределе при $a=0$ и получится выражение $\frac{d^2|x|}{dx^2}=2\delta(x)$, приведенное выше.

Упражнения

1. Написать первые производные разрывных функций: а) $y=x$, $x<1$; $y=x-1$, $x>1$; б) $y=\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$.

§ 4. Представление дельта-функции формулами

В конце предыдущего § 3 невзначай была получена формула — выражение функции

$$y=\frac{a^2}{2\,(x^2+a^2)^{3/2}}, \tag{4.1}$$

которая в пределе при $a\to 0$ приближается к*) $\delta(x)$. Рассмотрим

*) Заметьте «2» в знаменателе (4.1); без этой двойки получалось $2\delta(x)$.

систематически этот вопрос. Возьмем функцию $\varphi(x)$, от которой требуется только обращение в нуль при $x = \pm\infty$ и отличие от нуля интеграла $I = \int \varphi(x)\,dx$. Всегда можно сделать этот интеграл равным 1, умножая φ на соответствующую константу. Предположим, что это уже сделано, так что $\int \varphi(x)\,dx = 1$. Ясно, что φ имеет где-то между $-\infty$ и $+\infty$ максимум. Простейшие примеры представляют собой функции везде положительные и четные, т. е. симметричные относительно оси y; [последнее означает, что $\varphi(x) = \varphi(-x)$]. Вот несколько конкретных примеров:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2(1+x^2)^{3/2}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}, \quad \varphi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}.$$

График каждой из этих функций имеет колоколообразный вид (рис. 222); если их привести к одинаковой высоте (см. ниже), то на глаз их даже не легко отличить. Впрочем, последняя (экспоненциальная) функция при больших $|x|$ вдали от максимума гораздо теснее приближается к оси абсцисс, чем остальные *). Теперь вспоминаем, как нужно поступать для того, чтобы увеличить в n раз высоту колокола и уменьшить в m раз его ширину: для этого возьмем $n\varphi(mx)$. Если нужно сохранить площадь под колоколом, то надо выбрать $n = m$. Итак, функция $n\varphi(nx) \to \delta(x)$ при $n \to \infty$, или иначе

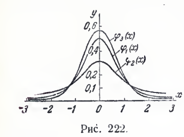


Рис. 222.

$\delta(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n\varphi(nx)$. Легко проверить и формально, что $\int n\varphi(nx)\,dx = \int \varphi(z)\,dz = \int \varphi(x)\,dx = 1$ путем подстановки $z = nx$.

Таким образом, трем вариантам $\varphi(x)$ соответствуют следующие три варианта представления дельта-функции:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(1+n^2x^2)^{3/2}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}}\,e^{-n^2x^2}. \qquad (4.2)$$

Проверим, что тот рецепт, который был предложен раньше:

$$\lim_{a\to 0} \frac{a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}},$$

*) Пересечение всех трех кривых φ_1, φ_2, φ_3 приблизительно в одной точке является, понятно, случайностью.

подходит под это определение: для этого перепишем

$$\frac{a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{a^2}{2a^3\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)^{3/2}}=\frac{1}{2a\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)^{3/2}}$$

и обозначим $n=1/a$; получим первый вариант представления δ согласно (4.2).

Итак, нет одной определенной простой формулы, которая давала бы $\delta(x)$: ясно, что одних слов $\delta(0)=\infty$ мало; чтобы определить δ, надо еще суметь показать, что это как раз та бесконечность, которая нужна. Однако $\delta(x)$ может быть получена как результат предельного перехода ($n\to\infty$) из вполне добропорядочных, хорошо определенных функций x, в которые вспомогательная величина n входит как параметр. При этом особенно нужно подчеркнуть, что δ можно получить таким предельным переходом из разных функций φ. До тех пор, пока n конечно, функции $n\varphi(nx)$ отличаются друг от друга и, в частности,

$$I=\int f(x)\,n\varphi(nx)\,dx\neq f(0), \tag{4.3}$$

и только в пределе при $n\to\infty$ все различные $n\varphi(nx)$ стремятся к одному пределу $\delta(x)$ и соответствующие интегралы *) (4.3) — к $f(0)$:

$$\lim_{n\to\infty} I=f(0). \tag{4.4}$$

Произвол, имеющий место в выборе первоначальной $\varphi(x)$, из которой получается $\delta(x)$, полностью соответствует сути дела. В следующих параграфах будут рассмотрены примеры применения $\delta(x)$ к физике. Описание какого-либо воздействия, т. е. какой-то конечной функции $\psi(x)$ с помощью дельта-функции возможно и целесообразно именно тогда, когда детальная форма воздействия, т. е. истинная зависимость его от x, несущественна, а важен лишь интеграл.

Приведенные выше примеры, конечно, вовсе не исчерпывают разнообразные $\varphi(x)$, из которых можно «изготовить» $\delta(x)$. Можно отказаться от симметрии $\varphi(x)$: при переходе к $n\varphi(nx)$ и увеличении n сокращается и расстояние максимума от $x=0$, т. е. даже асимметричная функция приближается к $\delta(x)$. Пример этому: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2}$ переходит в функцию $\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-(nx-1)^2}$, максимум которой лежит при $x=1/n$. Можно отказаться от записи $\varphi(x)$ простой единой формулой, обеспечивающей гладкость $\varphi(x)$. Так, можно взять саму функцию

*) Строго говоря, если $f(x)\to\infty$ при каких-то значениях x или при $x\to\infty$ или $x\to-\infty$, то не всякие $\varphi(x)$ годятся для получения (4.4). Далее, функция $f(x)$ не должна быть разрывной или по крайней мере ее разрывы не должны приходиться на ту точку ($x=0$), где $\delta(x)=\infty$, иначе как раз и возникнут бессмысленные вопросы о значении функции в точке разрыва.

$\varphi(x)$ разрывной

$$\varphi=1/2,\quad -1<x<1;\quad \varphi=0,\quad x<-1 \text{ и } x>1. \tag{4.5}$$

Предельный переход заключается в том, что берем

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_n=n/2,\quad -1<nx<1, \text{ т. е. } -1/n<x<1/n,\\ \varphi_n=0,\quad x<-1/n,\quad x>1/n\end{array}\right\} \tag{4.6}$$

и устремляем $n\to\infty$. (Нарисуйте график $\varphi(x)$ согласио (4.5), а также $\varphi_n(x)$ по формуле (4.6) при $n=3$ и $n=10$.)

Наконец, можно отказаться и от условия положительности $\varphi(x)$. Очень любопытный и важный пример представляет собой

$$R(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{+\omega}\cos\xi x\ d\xi=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega x}{x}.$$

При заданном ω график $R(x)$ показан на рис. 223. Значение $R(0)$ равно ω/π (неопределенность, связанная с одновременным обращением числителя и знаменателя в нуль при $x=0$, раскрывается элементарио). $R(x)$ проходит через нуль и меняет знак при $x=\pm\pi/\omega$, $\pm 2\pi/\omega$, $\pm 3\pi/\omega$, ... Колебания $R(x)$ затухают с удалением от $x=0$ за счет знаменателя. Кривая не вылезает за пределы линий $y=\pm 1/\pi|x|$ (пунктир на рис. 223). Можно проверить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx=1 \text{ при любом } \omega.$$

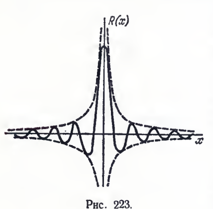


Рис. 223.

Оказывается, что при $\omega\to\infty$ можно рассматривать $R(x)$ как дельта-функцию! Это правдоподобно потому, что с увеличением ω растет высота ω/π главного максимума, приходящегося на ось R, и уменьшается ширина этой полуволны — $\pi/\omega<x<\pi/\omega$. Но как быть с тем фактом, что при увеличении ω не уменьшается амплитуда колебаний, по-прежнему R достигает $\pm 1/\pi x$, пунктирные линии не сужаются? Рассмотрим $\int f(x)\,R(x)\,dx$. Чем больше ω, тем чаще колебания, тем точнее компенсируют друг друга положительные и отрицательные полуволны, между тем вклад первой полуволны и ближайших к ней все время одинаков. Поэтому оказывается (доказательства здесь мы не приводим), что $\lim\limits_{\omega\to\infty}\int f(x)\,R(x)\,dx=f(0)$, а это и значит, что $\lim\limits_{\omega\to\infty} R(x)$ имеет свойства дельта-функции.

Интересна аналогичная функция

$$P(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=q}\cos kx\right).$$

С помощью формул элементарной тригонометрии можно получить выражение

$$P(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(q+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

График $P(x)$ при $q=10$ показан на рис. 224. При $q\to\infty$, $P(x)$ ведет себя вблизи $x=0$ совершенно так же, как $R(x)$ при $\omega\to\infty$. Отличие $P(x)$ заключается в том, что у $P(x)$ высокие максимумы повто-

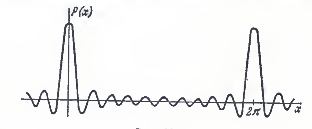


Рис. 224.

ряются периодически при $x=0$, $x=\pm 2\pi$, $x=\pm 4\pi$ и т. д. Другими словами, $P(x)$ представляет собой сумму дельта-функций

$$P(x)=\delta(x)+\delta(x-2\pi)+\delta(x+2\pi)+\delta(x-4\pi)+\delta(x+4\pi)+\ldots$$

Функции R и P и связь их с дельта-функцией — это не математические курьезы. Вспомним, как построены R и P: R — это интеграл косинусов, P — это сумма косинусов. Если из косинусов можно сложением *) построить $\delta(x)$, то $\delta(x-a)$ можно построить из $\cos\omega(x-a)=$ $=\cos\omega x\sin\omega a-\sin\omega x\cos\omega a$, т. е. из косинусов и синусов с постоянными коэффициентами. Но в таком случае и любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы косинусов и синусов. Любую функцию можно заменить серией ступенек $f(x_i)\,\Delta x_i$, а каждая такая ступенька — это в сущности $\delta(x-x_i)\,f(x_i)\,\Delta x_i$. Таким образом, с помощью R и P, т. е., по существу, через посредство дельта-функции, доказывается возможность разложения функций в ряд Фурье (если функция периодична) и интеграл Фурье (если функция непериодична).

Перечитайте этот параграф, когда на 2-м или 3-м курсе будете изучать ряды Фурье. Обычно в учебниках не упоминается дельта-

*) Интегрирование — это разновидность сложения!

функция — многие математики предпочитают возможно дольше не знакомить учащихся с такой физической ересью, подобно тому как школьников оберегают от Мопассана и Есенина. Понимание того, что в доказательствах в действительности используется дельта-функция, поможет Вам понять смысл этих доказательств.

§ 5. Применения дельта-функции

Покажем прежде всего, как дельта-функция позволяет сократить и сделать более удобной запись условий во многих задачах.

Рассмотрим стержень переменного сечения *), к которому прикреплено несколько отдельных точечных грузов (рис. 225). Пусть масса, приходящаяся на единицу длины стержня, выражается функцией $\rho(x)$. Масса всего стержня без грузов равна $\int\limits_a^b \rho(x)\,dx$, а вместе с грузами

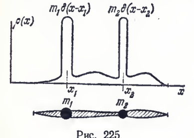


Рис. 225.

$$M=\int\limits_a^b \rho(x)\,dx+\sum m_i.$$

Положение центра тяжести

$$X=\frac{1}{M}\left(\int x\rho(x)\,dx+\sum x_i m_i\right).$$

Момент инерции относительно начала координат

$$I=\int x^2\rho(x)\,dx+\sum x_i^2 m_i.$$

Но с помощью дельта-функции можно включить отдельные массы в обобщенную функцию плотности. Обозначим новую функцию $\eta(x)$. Она выражается формулой

$$\eta(x)=\rho(x)+\sum m_i\delta(x-x_i).$$

В самом деле, рассматривая общее распределение массы по стержню, можно сказать, что в тех точках, где находятся грузы, плотность имеет бесконечные подскоки. С помощью новой функции все величины записываются единообразно и более кратко:

$$M=\int\limits_a^b \eta(x)\,dx,\quad X=\frac{1}{M}\int x\eta(x)\,dx,\quad I=\int x^2\eta\,dx.$$

*) Перед разбором этого примера повторите § 15 главы VI.

Понятие дельта-функции позволяет объединить непрерывно распределенные и точечные массы в одном общем выражении.

Другой пример применения дельта-функции относится к движению материальной точки. Напомним основное уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t).$$

Перечитайте в главе VI, § 5, стр. 335 рассуждение об импульсе силы и о движении частицы под влиянием короткого импульса силы, например под влиянием удара. Вспомните соображения о том что действие импульса силы не зависит от закона изменения силы

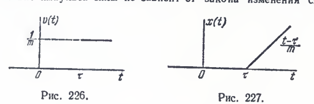


Рис. 226. Рис. 227.

если только сила достаточно кратковременна. Эти соображения аналогичны рассуждениям предыдущего § 4 о том, что дельта-функцию можно построить из различных функций $\varphi(x)$, об условиях, когда можно конечную функцию $\psi(x)$ заменять обобщенной особенной функцией $\delta(x)$.

Если конкретная форма функции силы несущественна в задаче об ударе, это значит, что $F(t)$ можно заменить на дельта-функцию $F(t)\to J\delta(t-\tau)$, где τ — момент удара, а $J=\int F(t)\,dt$ — импульс силы. Проведем формально по всем правилам интегрирование уравнения движения под действием единичной дельта-силы. Пусть до удара частица покоилась в начале координат: $t=-\infty$, $x=0$, $v=\frac{dx}{dt}=0$. Уравнение имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = \delta(t-\tau).$$

Интегрируя, получим

$$v(t)=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{t}\delta(t-\tau)\,dt=\frac{1}{m}\,\theta(t-\tau).$$

Скорость выражается ступенчатой функцией времени (рис. 226): $v=0$, $t<\tau$, $v=\frac{1}{m}$, $t>\tau$. Следующий шаг заключается в определении пути. Из $v=\frac{dx}{dt}$ получим ответ $x=0$, $t<\tau$, $x=\frac{1}{m}(t-\tau)$, $t>\tau$. График пути представлен на соседнем рис. 227.

Для графика пути $x(t)$ характерен излом в точке $t=\tau$. Здесь еще раз мы убеждаемся в том, что вторая производная функции, имеющей излом, содержит дельта-функцию: функция $x(t)$ имеет излом; согласно уравнению движения сила пропорциональна $\frac{d^2x}{dt^2}$, $x(t)$ с изломом получено как раз при силе, пропорциональной $\delta(t-\tau)$, так что при наличии излома $\frac{d^2x}{dt^2}$ содержит δ, что и требовалось доказать.

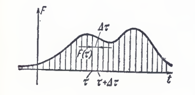


Рис. 228.

Теперь сделаем следующий шаг. Задача о движении тела под действием заданной силы линейна. Это значит, что если есть два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ под действием двух разных сил $F_1(t)$ и $F_2(t)$, то сумма решений $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ является решением, соответствующим действию суммы сил $F_3(t)=F_1(t)+F_2(t)$. Такое свойство есть следствие того простого факта, что вторая производная суммы функций есть сумма вторых производных каждой функции:

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}=\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x_2}{dt^2}.$$

Принимая во внимание $\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{F_1(t)}{m}$, $\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{F_2(t)}{m}$, получим

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{F_1(t)}{m}+\frac{F_2(t)}{m}=\frac{F_3(t)}{m},$$

что и требовалось,— сумма решений x_3 описывает движение под действием суммы сил.

Нужно сделать только одну оговорку: решения уравнения движения зависят не только от закона силы, но и от начальных условий, т. е. начального положения и начальной скорости рассматриваемой массы. Если мы выберем эти условия так: $t=-\infty$, $x_1=0$, $\frac{dx_1}{dt}=0$; $t=-\infty$, $x_2=0$, $\frac{dx_2}{dt}=0$, то и сумма решений x_3 будет удовлетворять тому же условию: $t=-\infty$, $x_3=0$, $\frac{dx_3}{dt}=0$.

Теперь соединим соображения о линейности и известное решение для дельта-функции, с тем чтобы получить общее решение уравнения для силы, произвольно зависящей от времени. Разобьем график силы $F(t)$ на полоски шириной $\Delta\tau$ (рис. 228). Что собой представляет отдельная полоска, расположенная между τ и $\tau+\Delta\tau$? Мы здесь переменим обозначения, чтобы оставить обозначение t за «текущим» временем, меняющимся от $-\infty$ до $+\infty$, тогда как τ относится к данной избранной полоске. Итак, высота полоски $F(\tau)$, ширина $\Delta\tau$, площадь (т. е. импульс силы) $F(\tau)\,\Delta\tau$. Так как полоска расположена

при $t=\tau$, то, очевидно, ее можно заменить дельта-функцией с коэффициентом, равным импульсу $F(\tau)\Delta\tau\,\delta(t-\tau)$. Решение уравнения движения для дельта-функции мы уже знаем. Обозначим его $x_1(t,\tau)$. Решение как функция времени t зависит от момента приложения силы τ. Напоминаем, что

$$x_1(t,\ \tau)=0,\ t<\tau;\ x_1(t,\ \tau)=\frac{1}{m}(t-\tau),\ \ t>\tau. \qquad (5.1)$$

Одна из полосок, на которые разложена сила, от τ до $\tau+\Delta\tau$ представляет собой $\delta(t-\tau)$ с коэффициентом $F(\tau)\Delta\tau$. Благодаря линейности уравнения решение для силы в виде такой полоски получится умножением x_1 на тот же коэффициент: $F(\tau)\Delta\tau\,x_1(t,\ \tau)$. Это есть решение, относящееся к действию одной полоски. Теперь используем линейность и выпишем решение для функции $F(t)$, которую мы рассматриваем как сумму полосок. Ясно, что суммирование здесь в действительности следует заменить интегралом. Итак,

$$x(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1(t,\ \tau)\,F(\tau)\,d\tau.$$

На первый взгляд, написанная формула имеет странный вид: координата x в момент t выражена интегралом по τ от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. в выражение входит сила во все моменты времени. Между тем ясно, что закон силы после момента t не влияет на предыдущее движение. Однако в выражении $x(t)$ нет никакой ошибки. Свойства функции $x_1(t,\ \tau)$ обеспечивают разумные свойства решения. В самом деле, $x_1(t,\ \tau)=0$ при $t<\tau$. Следовательно, при интегрировании по τ в действительности не нужно брать $\tau>t$, так как там тождественно равна нулю подынтегральная величина за счет равенства нулю множителя $x_1(t,\ \tau)$. Вспомнная выражение $x_1(t,\ \tau)$ (5.1), получим

$$x(t)=\frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)\,F(\tau)\,d\tau.$$

Такой способ получения решения имеет очень большое общее значение. Резюмируем: если для линейной системы известно решение, относящееся к воздействию дельта-функции, то решение, относящееся к воздействию произвольной функции ($F(t)$ в примере), получается простым суммированием или интегрированием.

Идеи линейности и сложения (по-ученому — суперпозиции) решений относятся не только к таким простым задачам, как движение точки; эти идеи справедливы для огромных областей математики, физики, естествознания. Бывает и так, что система сложна и решить уравнения нельзя даже для самого простого воздействия дельта-функцией. Решение, соответствующее дельта-функции, иногда можно получить опытным путем. В других случаях такое решение можно получить

из физических соображений (см. ниже задачу). Дальше вступают в силу соображения о линейности, и мы получаем ответ для любой воздействующей функции. Решение, соответствующее дельта-функции (т. е. $x_1(t, \tau)$ в примере выше), столь важно, что оно имеет специальное название — функция Грина задачи. Забавно то, что английский математик Грин, именем которого названа функция, жил в XIX веке и, естественно, не знал о дельта-функции. Но только введение дельта-функции позволило ясно и кратко объяснить суть функции Грина.

Таких примеров в математике немало: ведь и до изобретения производных и интегралов было известно много результатов, относящихся к касательным, площадям и объемам. Движение науки заключается не только в завоевании новых высот, новых результатов, но и в популяризации и упрощении выводов, полученных ранее. Задачей книги, чтение которой Вы сейчас заканчиваете, как раз и было облегчение понимания классического наследия — основ высшей математики.

Упражнения

1. Рассмотрим струну, натянутую силой k, с концами, закрепленными в точках $x=0$, $x=l$. Считая отклонение малым, определить по закону параллелограмма сил форму струны при действии единичной нагрузки в точке $x=x_1$ (рис. 229). Получить формулу отклонения

Рис. 229.

Рис. 230.

струны под действием силы, распределенной по ее длине по произвольному закону $f(x)$ *дин/см* (рис. 230).

2. Найти движение маятника под действием силы, выражающейся дельта-функцией, т. е. решить уравнение $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \delta(t-\tau)$ при условии $t=-\infty$, $x=0$, $\frac{dx}{dt}=0$. С помощью этого решения найти движение маятника под действием силы, зависящей от времени по произвольному закону.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ЧТО ДАЛЬШЕ?

«Высшая математика» — а точнее, дифференциальное и интегральное исчисление — дает возможность решить большой класс задач, не поддающихся решению методами арифметики, алгебры и геометрии. Огромное значение имеет сама формулировка новых понятий, таких как мгновенная скорость, ускорение, импульс силы — эти понятия (и многие другие, из других областей) формулируются точно только на языке производных и интегралов.

Знания, полученные Вами при чтении «Высшей математики для начинающих», составляют только малую часть всей математической науки, малую часть тех разделов математики, которые применяются в физике.

Здесь будут намечены те области физики и связанные с ними разделы математики, которые Вам предстоит изучить в дальнейшем.

Предыдущий текст был написан как учебник, так что, приложив достаточно внимания и труда, можно было полностью, во всех деталях понять написанное. Приходится предупредить читателя, что ниже, рассказывая о трудных вопросах, нам придется отступить от стиля учебника. В кратком заключении нельзя изложить *содержание* математической физики, можно только попытаться дать общее представление о задачах этой науки и заинтересовать читателя.

Чтобы лучше понять нижеследующее, попробуем вкратце сформулировать общее свойство задач, которыми мы занимались выше. Это были задачи о движении одной частицы — в механике, задачи об изменении со временем одной или двух величин: координаты и скорости тела или заряда в конденсаторе и тока в цепи. Мы имели дело с функциями

одной переменной — времени; число рассматриваемых функций могло равняться единице (сила тока как функция времени) или двум — положение тела $X(t)$ и скорость тела $v(t)$.

Напрашивается естественное чисто количественное обобщение: дальше пойдут задачи о движении двух тел, трех тел и т. д. За этим «и так далее» видна и задача о движении газа или жидкости. Ведь один грамм водорода — это $3\cdot10^{23}$ молекул, т. е. $3\cdot10^{23}$ отдельных тел, не более того.

Здесь становится ясно, что нужны новые методы: не только решить $3\cdot10^{23}$ уравнений нельзя, но и просто выписать все эти уравнения не хватит ни бумаги, ни времени.

Возникают новые науки — гидродинамика и газодинамика, в отличие от механики точки, и новый способ постановки и решения задач. Мы спрашиваем, сколько молекул в той или иной части рассматриваемого объема.

Решение задачи заключается в определении распределения плотности газа в пространстве $\rho(x, y, z)$, давления газа $p(x, y, z)$, скорости газа в различных точках пространства. Здесь надо добавить, что все эти величины зависят также и от времени, например $p(x, y, z, t)$. Кроме того, скорость газа есть векторная величина, т. е. в каждой точке задана величина и направление скорости. Иными словами можно сказать, что заданы три составляющих вектора. Таким образом, от задачи о нескольких функциях одной переменной происходит переход к функциям *нескольких* независимых переменных.

Соответственно при формулировании самих уравнений появляются производные по времени и по пространственным координатам, например, $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ и $\frac{\partial\rho}{\partial x}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}$, $\frac{\partial\rho}{\partial z}$. Напомним, что круглые буквы ∂ пишутся, когда мы имеем дело с частными производными, т. е. когда рассматривается изменение функции при изменении одной из переменных и при неизменных значениях остальных переменных: например,

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\rho(x, y+\Delta y, z, t)-\rho(x, y, z, t)}{\Delta y}.$$

Важнейший раздел математической физики составляет именно исследование уравнений в частных производных. Уравнения в частных производных описывают движение жидкостей, газов и твердых тел, распространение тепла в этих средах, явления диффузии атомов и молекул.

Во всех этих случаях, как уже говорилось, в принципе можно было бы по-прежнему рассматривать отдельные частицы и много функций одной переменной — времени. Но есть и другие физические теории — прежде всего теория электромагнетизма, где это не так.

Пусть рассматриваются два покоящихся точечных заряда. Сила, действующая между ними, зависит от их положения (от расстояния между ними); казалось бы, это задача о шести функциях (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) одной переменной — времени. Движение зарядов в первом приближении мало меняет дело: надо только учитывать, что возникает еще магнитное взаимодействие между зарядами, зависящими от их скорости.

Важнейший факт, требующий принципиально нового подхода, заключается в том, что существует запаздывание взаимодействия, передача взаимодействия со скоростью света. Действие одного заряда на другой зависит от положения (и скорости) первого заряда в некий предыдущий момент времени. Теория, в которой все, что произойдет с зарядами к моменту $t+\Delta t$, полностью определяется заданием состояния в момент t — это теория электромагнитного поля. В этой теории наряду с отдельными зарядами рассматривается электрическое поле E и магнитное поле H, которые заданы, заполняют все пространство. Величины E и H — это векторы и в то же время функции координат и времени; математически теория электромагнитного поля — это теория уравнений в частных производных, похожая на теорию упругости, акустику или газодинамику. Разница лишь в том, что в последнем случае уравнения получаются путем идеализации: о плотности газа мы говорили, отвлекаясь от отдельных молекул. Только в этом приближенном смысле газ можно рассматривать как непрерывную среду, характеризуемую непрерывной функцией $\rho(x, y, z, t)$. Электрическое поле действительно является непрерывной функцией.

Гидродинамика, развитая в XVIII веке, подготовила математический аппарат для электромагнитной теории. Не удивительно поэтому, что вначале пытались перенести в электромагнитную теорию и идеи механики — думали, что есть особое вещество, эфир, такое, что его движение ответственно за электрические и магнитные явления. Мы знаем, что математическая аналогия осталась, а физический смысл электромагнитной теории оказался другим, не сводящимся к механике.

Говоря о математической теории, обязательно нужно сказать не только о постановке задачи и исходных уравнениях, но и о характере результатов.

Для уравнений в частных производных можно выделить два типа решений. Один тип, характерный для ограниченного объема — это собственные колебания с определенными частотами. Тело данной формы имеет некий набор частот.

Вспомните маятник: у него есть определенная частота колебаний. При действии внешней силы на маятник получаются характерные явления резонанса, когда частота внешней силы близка к частоте колебаний маятника. Все это получалось в теории обыкновенных дифференциальных уравнений: $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+f(t)$. В теории уравнений в частных производных оказывается, что тело имеет много частот и ведет себя как набор, как совокупность многих маятников с разными частотами, имеет много резонансов. Если у Вас дома есть рояль или пианино — проверьте сказанное. Медленно, беззвучно опустите клавишу, чтобы только освободить струну, не ударяя ее молоточком. Теперь коротко ударяйте по другим клавишам и слушайте, как откликается свободная струна...

Для вещества, заполняющего все пространство, характерен другой тип решения уравнений в частных производных — распространение волн. В частности, такими волнами в электромагнитной теории являются радио и свет, в упругих средах — звук. Замечательна способность волн переносить информацию: давление или электрическое поле в одной точке (вблизи приемника — как функция времени) оказывается подобным кривой зависимости от времени той же величины источника — передатчика.

Можно построить решения уравнений, описывающие направленный луч прожектора или лазера. Бросается в глаза сходство между лучом прожектора и струей из брандспойта. Знание свойств решений задач разных типов имело и имеет важнейшее значение для развития физики.

Спектры атомов долго составляли загадку для физиков; загадкой были даже не столько конкретные закономерности и численные значения частот, а сам факт, что один и тот же атом испускает или резонансно поглощает колебания нескольких различных, но вполне определенных частот. Сходство с колебаниями упругих тел позволило подойти

к формулировке уравнений квантовой механики; сходство между струей частиц и решениями для волн также нашло свое применение в квантовой механике.

В принципе математику можно рассматривать как разновидность уточненой, усовершенствованной логики. Замечательно, что построив правила этой логики и выучив их, человек получил орудие более мощное, чем обыкновенный «здравый смысл».

Человек руками создает простые орудия, с помощью которых строит станки, с помощью которых строит еще более совершенные и сложные механизмы, и с помощью этих механизмов он способен сделать то, что недоступно голым рукам. Вот так же точно и математика, развивая все более сложные теории и создавая новые понятия, дает возможность понять и овладеть самыми необычными явлениями природы.

Выше я привел только несколько примеров, относящихся к теории уравнений определенного типа.

Другой замечательный пример дает геометрия.

Весь повседневный опыт учит нас, что в пространстве удобно ввести три координаты x, y, z. Кажется, что дальнейшие хитросплетения не нужны, «от лукавого». Между тем можно ведь и иначе ввести координаты, так чтобы координата $\xi = \text{const}$ соответствовала бы какой-то кривой поверхности (между тем как $x = \text{const}$ при любых y и z — это уравнение плоскости, перпендикулярной оси x).

Итак, можно ввести криволинейные координаты ξ, η, ζ и с трудом, мучительно научиться вычислять расстояние между точками и другие величины с помощью новых координат.

На первый взгляд это скучное малополезное занятие. Нужно обладать очень специфическим складом ума («настоящие герои любят трудности» — см. кинофильм «Айболит — 66»), чтобы увидеть красоту в преодолении трудностей, в развитии теории с любыми, самыми общими координатами.

А затем, как удар грома, появляется общая теория относительности (может быть, теории Лобачевского, Больяи, Римана были беззвучными вспышками молний, предшествовавшими этому громовому удару). Обобщенные координаты одинаково удобны (или одинаково неудобны) для описания обычного пространства, в котором верна геометрия Евклида, и для описания кривого пространства. Прямоугольные координаты x, y, z удобны для обычного пространства, но абсо-

лютно непригодны для описания кривого пространства; эти координаты (x, y, z) даже не дают намека на саму возможность существования каких-то других пространств.

Занятия криволинейными координатами, казавшиеся ненужным осложнением, подготавливают нас к выходу в область изучения таких пространств, о самом существовании которых мы не знали. Потом оказывается, что сила всемирного тяготения связана именно с тем, что пространство немного кривое. Впрочем, это «немного» относится к условиям на Земле, в солнечной системе. В явлениях бо́льшего масштаба (катастрофических взрывах звезд, в эволюции Вселенной) пространство может быть и сильно искривленным. В исследовании природы преодоление математических трудностей, владение математическим аппаратом и физическая интуиция, идейная смелость, эксперимент и наблюдение — все эти очень разные подходы нужны, только сплав их ведет к продвижению вперед.

Вернемся к математике и даже более узко — к математической физике.

Существует пошлое высказывание «Математика — это мельница, которая перемалывает только то, что в нее заложено». Так оправдывают плохие результаты применения математики к неправильным исходным предположениям. В действительности эта мельница часто выдает больше того, что было заложено, выдает то, что не ожидалось!

В конце курса математической физики снова можно будет написать главу под названием «а что еще дальше», но не надо отчаиваться, потому что здесь уже близок тот рубеж, за которым продвижение вперед представляет собой не только учебу, но и творчество, развитие новых теорий.

Я пытаюсь представить себе своего читателя, который через несколько минут со вздохом облегчения закроет эту книгу. Наверно, большинство из Вас старшие школьники или первокурсники, которых в модной пьесе из жизни студентов называют «одноклеточные или простейшие».

Пусть математика для Вас навсегда останется точным и прекрасным языком, способом выражения мыслей и способом мышления; пусть математика не будет предметом, который нужно весь «сдать и ничего себе не оставить». Любите математику — и любовь будет взаимной, математика поможет Вам.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава I

§ 3

1. а) $z=t^2$, $\Delta z=\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)^2-\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)^2=2t\cdot\Delta t$; $\frac{\Delta z}{\Delta t}=2t$, $\frac{dz}{dt}=2t$; б) $z=t^3$, $\Delta z=\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)^3-\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)^3=3t^2\cdot\Delta t+\frac{(\Delta t)^3}{4}$; $\frac{\Delta z}{\Delta t}=3t^2+\frac{(\Delta t)^2}{4}$, $\frac{dz}{dt}=3t^2$. Результаты совпадают с вычислением в § 3; обратите внимание на то, что в случае $z=t^2$ отношение $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ не зависит от Δt, а в случае $z=t^3$ отношение $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ содержит только $(\Delta t)^2$. **2.** $y'=4x^3$. **3.** $y'=2x+2$. **4.** $y'=-\frac{2}{x^3}$. **5.** $y'=-\frac{2b}{x^3}$. **6.** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

§ 4

1. Найдем $(1,2)^2$. Рассмотрим функцию $z=t^2$; пусть $t=1$ и $\Delta t=0,2$; $z'=2t$; $z'(1)=2$; поэтому $\Delta z=2\cdot 0,2=0,4$; $(1,2)^2=1^2+0,4=1,4$. Точное значение $(1,2)^2=1,44$. Ошибка составляет примерно 3%. $(1,1)^2=1,2$; точное значение 1,21. Ошибка примерно 1%. $(1,05)^2=1,1$; точное значение 1,1025. Ошибка примерно 0,2%. $(1,01)^2=1,02$; точное значение 1,0201. Ошибка примерно 0,01%. **2.** См. табл. 1.

Таблица 1

t	z_{Φ}	$z_{\text{ист}}$	Ошибка в % округленно
1,1	18,0	17,5	0,3
1,05	17,5	17,4875	0,07
0,98	16,8	16,798	0,01

§ 5

1. См. рис. 231. 2. См. рис. 232. 3. См. рис. 233. 4. См. рис. 234. 5. См. рис. 235. 6. $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$, $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$; $y=3x-2$, $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $(0,\ -2)$. 7. Для кривой $y=ax^2$ касательная в точке $(x_0,\ y_0)$ пересекает оси координат в точках $\left(x_0/2,\ 0\right)$ и $(0,\ -y_0)$ (см. стр. 29). Для кривой $y=ax^3$ уравнение касательной в точке $(x_0,\ y_0)$ $y=3ax_0^2x-2y_0$. Точки пересечения касательной с осями координат $\left(\frac{2}{3}x_0,\ 0\right)$, $(0,\ -2y_0)$.

§ 6

1. $x=0$, минимум при $a>0$, максимум при $a<0$. 2. $x=-1$ максимум, $x=1$ минимум. 3. $x=-\sqrt{a}\,(a>0)$ максимум, $x=\sqrt{a}\,(a>0)$ минимум. При $a<0$ нет ни минимума, ни максимума. 4. $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ максимум, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ минимум. 5. а) $a>0$, $x=0$ минимум; б) $a=0$, $x=0$ минимум; в) $a<0$, $x=0$ максимум, $x=-\sqrt{-a/2}$ минимум, $x=\sqrt{-a/2}$ минимум.

§ 8

2. В табл. 2 приведены значения сумм при разбиении отрезка на m частей, где $m=10,\ 20,\ 50,\ \infty$. Видно что уже для $m=50$ обе суммы мало отличаются от предельного значения при $m\to\infty$.

Таблица 2

m	10	20	50	∞
Δt	0,1	0,05	0,02	0
$\sum t_{i-1}^2\Delta t$	2,18	2,26	2,30	2,33
$\sum t_i^2\Delta t$	2,49	2,41	2,37	2,33

§ 11

1. $\frac{1}{3}$. 2. 0,11033... 3. $\frac{1}{2}$. 4. $2(\sqrt{3}-1)$. 5. $S=\int\limits_0^b y(x)\,dx$, где $y=y(x)$ — уравнение гипотенузы. Возьмем произвольную точку A с координатами x, y на гипотенузе. Через эту точку проведем вертикальную прямую (см. рис. 19). Из подобия треугольников $\frac{x}{b}=\frac{y}{h}$. Отсюда $y=\frac{h}{b}x$. $S=\int\limits_0^b \frac{h}{b}x\,dx=\frac{h}{b}\int\limits_0^b x\,dx=\frac{h}{b}\frac{x^2}{2}\Big|_0^b=\frac{1}{2}bh.$

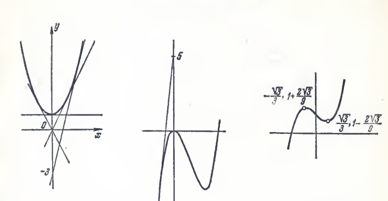


Рис. 231. Рис. 232. Рис. 233.

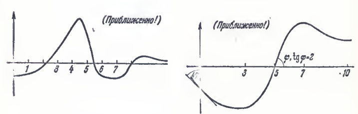


Рис. 234. Рис. 235.

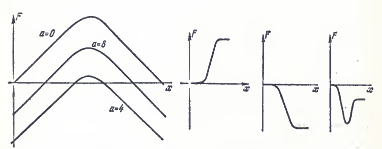


Рис. 236. Рис. 237.

7. $S=\frac{1}{3}x_0y_0$. 8. $S=\frac{2}{3}x_0y_0$. 9. $S=\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$. 10. 0,7837 для $m=5$; 0,7850 для $m=10$. 11. См. рис. 236. 12. См. рис. 237.

§ 13

1. $\bar{y}=\bar{x^2}=\int\limits_0^2\frac{x^2\,dx}{2}=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$. 2. $y(0)=0$, $y(2)=4$; $\frac{y(0)+y(2)}{2}=2$; $y(1)=1$; $y(1)=1<\bar{y}=1{,}33<\frac{y(0)+y(2)}{2}=2$.

3 $\bar{y}=\frac{1}{6}y(0)+\frac{2}{3}y(1)+\frac{1}{6}y(2)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot 4=1{,}33$. 4. $\int\limits_a^b y\,dx=$

$$=\left(\frac{1}{3}rx^3+\frac{1}{2}px^2+qx\right)\Big|_a^b=\frac{1}{3}r(b^3-a^3)+\frac{1}{2}p(b^2-a^2)+$$
$$+q(b-a)=(b-a)\left[\frac{1}{3}r(b^2+ab+a^2)+\frac{1}{2}p(b+a)+q\right].$$

По формуле (13.2) должно быть

$$\int\limits_a^b y\,dx=(b-a)\bar{y}=(b-a)\left[\frac{1}{6}y(a)+\frac{2}{3}y\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{6}y(b)\right].$$

Подставляя $y(a)$, $y\left(\frac{a+b}{2}\right)$ и $y(b)$ и сравнивая с полученным выше выражением, убеждаемся в том, что они тождественны.

5. $\bar{F}=\frac{1}{2R-R}\int\limits_R^{2R}\frac{A}{r^2}\,dr=\frac{1}{R}\left(-\frac{A}{r}\right)\Big|_R^{2R}=\frac{1}{R}\left(-\frac{A}{2R}+\frac{A}{R}\right)=0{,}5\,\frac{A}{R^2}$.

Среднее значение силы на этом участке вдвое меньше силы на поверхности Земли, $\bar{F}=0{,}5F_0$. 6. $F(R)=F_0$, $F(2R)=\frac{1}{4}F_0$; $\frac{F(R)+F(2R)}{2}=0{,}625E_0>0{,}5F_0$. 7. $F\left(\frac{R+2R}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}R\right)=\frac{4}{9}F_0$. $\frac{1}{6}F_0+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}F_0+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}F_0=\frac{109}{216}F_0=0{,}505\,F_0$. Ошибка 1%!

Глава II

§ 3

1. Найдем производную $z=(ax+b)^2$, раскрыв предварительно скобки: $z=a^2x^2+2abx+b^2$, $z'=2a^2x+2ab=2a(ax+b)$. Найдем те-

перь эту же производную по правилу нахождения производной сложной функции $z=y^2$, $y=ax+b$, $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=2ya=2ay=2a(ax+b)$.
2. $z'=-\frac{a}{(ax+b)^2}$; $z'=-\frac{2a}{(ax+b)^3}$; $z'=\frac{1}{(x+1)^2}$.

§ 4

1. $y=x^4=x^2x^2$; $y'=2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x=4x^3$. 2. $y'=(4x+1)\times\times\sqrt{x}+(2x^2+x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 3. $y'=\frac{(3x^2+10x)(x+1)-(x^3+5x^2)\,1}{(x+1)^2}=$ $=\frac{2x(x^2+4x+5)}{(x+1)^2}$. 4. $y'=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}$.

§ 5

1. $y'=5x^4-12x^3+3x^2+14x-2$. 2. $y'=2(x^3+x+1)\cdot(3x^2+1)$. 3. $y'=4(x^2-x+1)^3(2x-1)$. 4. $y'=10(3x^2-1)^9\,6x$. 5. $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
6. Удобно записать y при помощи дробной степени $y=x^{2/5}$. Теперь находим по общей формуле для производной степени; $y'=$ $=\frac{2}{5}x^{-3/5}$. 7. а) Если x изменяется на 1%, то $\Delta y=n\cdot 0{,}01y$; поэтому при изменении x на k% будет $\Delta y=n\cdot 0{,}01\cdot y\cdot k$. В данном случае x изменяется на 10%, $\Delta y=n\cdot 0{,}1y$. Так как $n=\frac{1}{2}$, то $\Delta y=\frac{1}{2}\cdot 0{,}1y=0{,}05y$. Поэтому $y(11)=y(10)+0{,}05\cdot 5=5{,}25$; $y(9)=$ $=y(10)-0{,}05\cdot 5=4{,}75$. Получим точное решение. Обозначим коэффициент пропорциональности через k; тогда $y=k\sqrt{x}$. Так как при $x=10$ должно быть $y=5$, то $5=k\sqrt{10}$, откуда $k=1{,}58$ (вычисления введем с двумя знаками после запятой). Поэтому $y=1{,}58\sqrt{x}$; $y(11)=1{,}58\sqrt{11}=5{,}24$; $y(9)=4{,}74$. б) Приближенные значения $y(11)=4{,}50$; $y(9)=5{,}50$. Точные значения $y(11)=4{,}54$; $y(9)=5{,}56$. в) Приближенные значения $y(11)=6{,}00$; $y(9)=4{,}00$. Точные значения $y(11)=6{,}05$; $y(9)=4{,}05$.

§ 6

1. $y'=3x^2(x^2-1)^2+x^3\cdot 2(x^2-1)\,2x=x^2(x^2-1)(7x^2-3)$. 2. $y'=$ $=3x^2\sqrt{x^2+x}+\frac{(2x+1)x^3}{2\sqrt{x^2+x}}$. 3. $y'=5x^4\sqrt[3]{x^2-1}\,(x^3-2x)^{1/5}+$ $+\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2-1}\,2x\cdot x^5(x^3-2x)^{1/5}+\frac{1}{5}\frac{(x^3-2x)^{1/5}}{x^3-2x}(3x^2-2)\,x^5\sqrt[3]{x^2-1}$.

4. $y'=\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)\sqrt{x^3-2}+\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2}}$. 5. $y'=$ $=2x\sqrt{\sqrt[3]{x}+x}+x^2\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1}{2\sqrt{\sqrt[3]{x}+x}}$. 6. $y'=5\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^4\times$ $\times\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)x+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$. 7. $y'=\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. 8. $y'=$ $=2\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$. 9. $y'=\frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}$. 10. $y'=\frac{-12x+5}{x^6}\times$ $\times\sqrt{x^3+2}+\frac{3(3x-1)}{2x^3\sqrt{x^3+2}}$. 11. $y'=-\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$. 12. $y'=$ $=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-\frac{x}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}$. 13. $y'=\frac{4x+3\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$.

14. $y'=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}+\frac{6x^2+\sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}=\frac{7x^2+2\sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$.

15. $y'=\frac{(8x-3^3)\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^3}$. 16. $y'=\sqrt[3]{(2x+3)^2}+x\frac{4}{3\sqrt[3]{(2x+3)}}$.

17. $y'=3x^2\sqrt{x-1}+\frac{x^3-1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt[3]{x^2-1}+\frac{2x^3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

18. $y'=\frac{-2x^2-x+9}{3(x-1)^3\sqrt[3]{2x-3}}$. 19. $y'=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{(x+1)^2}$.

20. $y'=\frac{4x^3-10x^2-22x-11}{3(x-2)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. 21. $y'=\frac{-x^5+2x^3+2x^2-1}{(x^3+1)^2\sqrt{x^2-1}}$.

22. $y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)^2}\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. 23. $y'=\sqrt{x^2-1}\times$ $\times\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}+\frac{(1+2\sqrt{x})x\sqrt{x^2-1}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$.

24. $y'=\frac{1}{7}\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-6/7}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)x^2+2x\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/7}$.

25. $y'=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-2}{\sqrt[3]{x+1}}-\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}-2x}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}=\frac{1-6\sqrt[3]{x^2}-4x\sqrt[3]{x^2}}{3(x+1)\sqrt[3]{x^2(x+1)}}$.

§ 7

1. $y'=2,3\cdot 10^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 2. $y'=2,3\lg 2\cdot 2^x$. 3. $y'=2,3\lg 5\cdot 5^{x+1}$. 4. $y'=-2,3\lg 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

§ 8

1. $y'=-e^{-x}$. 2. $y'=2xe^{x^2}$. 3. $y'=(3x^2-3)e^{x^3-3x+1}$. 4. $y'=$ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$. 5. $y'=5e^x-3e^{3x}$.

§ 9

1. 2,3026; 4,6052. 2. $\log_5 15=\frac{\lg 15}{\lg 5}=1,6825$. 3. Дифференцируя обе части, находим $\frac{(uv)'}{uv}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$. Отсюда $(uv)'=u'v+uv'$. 5. $y'=$ $=\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{1}{x}$. Этот же результат можно получить и так: $y=\ln 2x=$ $=\ln 2+\ln x$; $y'=(\ln 2)'+(\ln x)'=\frac{1}{x}$. 6. $y'=\frac{1}{x+3}$. 7. $y'=\frac{1}{x}$. 8. $y'=\frac{2x}{x^2+1}$. 9. $y'=\frac{6x-1}{3x^2-x+1}$. 10. $y'=\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{(x^2-1)}$. 11. $y'=\frac{1-x}{2x(x+1)}$. 12. $y'=\ln x+1$. 13. $y'=3x^2\ln(x+1)+\frac{x^3}{x+1}$.

14. Для нахождения производной возьмем логарифмы от обеих частей равенства (основание логарифмов можно брать любым, будем брать натуральные логарифмы) $\ln y=x\ln x$. Теперь возьмем производную от обеих частей этого равенства, учитывая, что y есть функция от x и $\ln y$, следовательно, сложная функция: $\frac{1}{y}y'=\ln x+1$. Отсюда находим $y'=y(\ln x+1)$, или окончательно $y'=x^x(\ln x+1)$. Аналогично делается следующий пример. 15. $y'=x^{\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+\right.$ $\left.+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

§ 10

1. $y'=2\cos(2x+3)$. 2. $y'=-\sin(x-1)$. 3. $y'=-(2x-1)\times$ $\times\sin(x^2-x+1)$. 4. $y'=2\sin x\cos x$. 5. $y'=3\cos 3x\cos^2 x-$ $-2\cos x\sin x\sin 3x$. 6. $y'=(\sin 2x)^x\left[\ln\sin 2x+\frac{2x\cos 2x}{\sin 2x}\right]$ (см. ре-

шение примера 14 из § 9). 7. $y'=\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}$. 8. $y'=\frac{2}{\cos^2 2x}e^{\operatorname{tg} 2x}$
9. $y'=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

§ 11

1. а) $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; а) $y'=-\frac{1}{1+x^2}$. 3. $y'=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. 4. $y'=$ $=\frac{3}{9x^2+6x+2}$. 5. $y'=\frac{2x-1}{x^4-2x^3+x^2+1}$. 6. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

§ 12

1. -1; 1. 2. -1.

§ 15

1. Для выполнения интегрирования раскроем скобки; получим интеграл от многочлена $\int x(x-1)^2\,dx=\int x(x^2-2x+1)\,dx=\int (x^3-$ $-2x^2+x)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$. 2 Запишем подынтегральную функцию так: $\frac{x^2+2x-3}{x}=x+2-\frac{3}{x}$. Теперь интегрирование выполняется легко: $\int\frac{x^2+2x-3}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x-3\ln x+C$. 3. Сделаем замену переменной $3x-5=t$; $dt=3dx$, $\int\cos(3x-5)\,dx=$ $=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin(3x-5)+C$. 4. Решается аналогично предыдущему. Получаем $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$. 5. $\frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3}+C$. 6. $\cos x+x\sin x+C$. 7. $x(\ln x-1)+C$. Примеры 8—11 можно делать при помощи формулы интегрирования по частям. Однако удобнее применить способ неопределенных коэффициентов. 8. $\frac{1}{2}x\sin 2x-$ $-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\right)\cos 2x+C$. 9. $(-x^3-3x^2-6x-6)e^{-x}+C$. 10. $(2x+$ $+1)\cos x+(x^2+x-1)\sin x+C$. 11. $\int(2x^2+1)\cos 3x\,dx=(a_1x^2+b_1x+$ $+c_1)\cos 3x+(a_2x^2+b_2x+c_2)\sin 3x$. Возьмем производную от обеих частей равенства: $(2x^2+1)\cos 3x=(2a_1x+b_1)\cos 3x-(3a_1x^2+3b_1x+$ $+3c_1)\sin 3x+(2a_2x+b_2)\sin 3x+(3a_2x^2+3b_2x+3c_2)\cos 3x$, или так:

$(2x^2+1)\cos 3x = (-3a_1x^2 - 3b_1x - 3c_1 + 2a_2x + b_2)\sin 3x + (3a_2x^2 + 3b_2x + 3c_2 + 2a_1x + b_1)\cos 3x$. Поэтому должно быть $2x^2+1 = 3a_2x^2 + 3b_2x + 3c_2 + 2a_1x + b_1$, $0 = -3a_1x^2 - 3b_1x - 3c_1 + 2a_2x + b_2$. Для того чтобы были равны два многочлена, надо, чтобы были равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая коэффициенты, получим: $3a_2 = 2$, $3b_2 + 2a_1 = 0$, $3c_2 + b_1 = 1$, $-3a_1 = 0$, $-3b_1 + 2a_2 = 0$, $-3c_1 + b_2 = 0$. Из этой системы находим $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_1 = 0$, $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_1 = \frac{4}{9}$, $c_2 = \frac{5}{27}$. Поэтому $\int (2x^2+1)\cos 3x\,dx = \frac{4}{9}x\cos 3x + \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{27}\right)\sin 3x + C$. 12. $\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$. Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получаем: $A(x-3) + B(x-2) = x$ или $x(A+B) - 3A - 2B = x$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $A+B=1$, $-3A-2B=0$, откуда $A=-2$, $B=3$; $\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x-3)} = \int \left\{ \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right\} dx = -2\ln(x-2) + 3\ln(x-3) + C$.

13. $\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$, $A(x-2) + B(x-1) = x+1$. В последнем равенстве положим $x=2$, получим $B=3$; затем положим $x=1$, получим $A=-2$, $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx = -2\ln(x-1) + 3\ln(x-2) + C$. 14. $-\ln(x-1) + \ln(x-2) + C$.

15. Положим $\sqrt{x} = z$. Тогда $x = z^2$ и $dx = 2z\,dz$; $\int \frac{x\,dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{z^2\,2z\,dz}{z^2+z} = 2\int \frac{z^2\,dz}{1+z} = 2\int \frac{z^2-1+1}{1+z}dz = 2\int \left[(z-1) + \frac{1}{1+z}\right]dz = z^2 - 2z + \ln(1+z) + C = x - 2\sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x}) + C$.

16 $\sqrt{x^2-5} + C$. 17. $-\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x + C$. 18. $-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$. 19. $-\ln\cos x + C$. 20. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$. 21. $\arcsin\frac{x}{a} + C$.

22 $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. 23. $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. 24. Выполним интегрирование по частям, полагая $f = \sin 3x$, $dg = e^{2x}dx$. Получим $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$. В последнем интеграле опять выполним интегрирование по частям, полагая $f = \cos 3x$, $dg = e^{2x}dx$. Получим $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\right)$. Рассматривая последнее равенство как уравне-

нне для $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$, находнм $\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)}{13}$.
25. $\frac{e^x(\cos 2x+2\sin 2x)}{5}$.

§ 17

1. $y=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d+(3ax_0^2+2bx_0+c)(x-x_0)+(3ax_0+b)\times\times(x-x_0)^2+a(x-x_0)^3$. Следующне члены все равны нулю. Сумма выпнсанных четырех членов равна многочлену. 2. $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$, ..., $y^{(n)}(0)=n$, $y=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\ldots=x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)=xe^x$. 3. $y=e\left[1+(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3+\ldots\right]$. 4. Первый способ: $y(0)=1$, $\Delta y=y(\Delta x)-1$.

Δx	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\Delta x\to 0$
$y(\Delta x)$	2,7183	1,6487	1,2840	1,1331	$1+\Delta x$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1,718	1,297	1,136	1,065	1

Второй способ: $\Delta y=y\left(\frac{\Delta x}{2}\right)-y\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)$.

Δx	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\Delta x\to 0$
$y\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$	1,6487	1,2840	1,1331	1,064494	$1+\frac{\Delta x}{2}$
$y\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)$	0,6065	0,7788	0,8825	0,939412	$1-\frac{\Delta x}{2}$
Δy	1,042	0,5052	0,2506	0,125082	Δx
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1,042	1,010	1,002	1,0006	1

5. Находим производные: $\frac{d\ln(1+r)}{dr}=\frac{1}{1+r}$, $\frac{d^2\ln(1+r)}{dr^2}=-\frac{1}{(1+r)^2}$, $\frac{d^3\ln(1+r)}{dr^3}=\frac{2}{(1+r)^3}$, ... Значения этнх производных

при $r=0$ равны соответственно: 1; —1; 2; ... Формула Маклорена дает $\ln(1+r)=r-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{6}\cdot 2r^3+\ldots=r-\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}+\ldots$, $e^{m\ln(1+r)}=e^{mr}\cdot e^{-\frac{mr^2}{2}+\frac{mr^3}{3}+\ldots}$; при малом r e^{mr} отличается от истинного значения множителем $e^{-\frac{mr^2}{2}}$. В примере § 8 на стр. 104 $m=50$, $r=0{,}02$; $e^{-\frac{mr^2}{2}}=e^{-0{,}01}=0{,}99$; ошибка 1%; m может быть любым большим числом, лишь бы было мало mr^2, при этом малость mr^3, mr^4, ... обеспечена.

§ 19

1. $y=\frac{x+1}{1-x}=1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\ldots$ 2. $y=\ln(1+x)=$ $=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ 3. $y=\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+$ $+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots$ В первом и втором примерах ряды пригодны для вычислений, если $|x|<1$; в третьем, если $0<x<2$.
4. $f(x)g(x)=f(0)g(0)+[f'(0)g(0)+g'(0)f(0)]x+\frac{1}{2}[f''(0)g(0)+$ $+2f'(0)g'(0)+g''(0)f(0)]x^2+\ldots$

§ 21

1. 1. 2. $-\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. ∞. 5. 1. 6. $\frac{1}{2}$.

Глава III

§ 1

1. $x=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$. 2. Пусть основание треугольника $AC=a$, высота $BH=h$, пусть $DEFG$ — искомый прямоугольник. Из подобия (рис. 238) $\frac{DE}{AC}=\frac{BH_1}{BH}$; обозначая $DE=x$, получаем $\frac{x}{a}=$ $=\frac{h-H_1H}{h}$, откуда $H_1H=h\left(1-\frac{x}{a}\right)$. Площадь прямоугольника $S(x)=xh\left(1-\frac{x}{a}\right)=hx-\frac{h}{a}x^2$. Решая уравнение $S'(x)=0$, находим $x=\frac{a}{2}$; тогда $H_1H=\frac{h}{2}$. 3. Искомым прямоугольником является квадрат, $S=\frac{1}{2}R^2$. 4. Радиус основания банки $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, высота

ее $H=2r$. 5. $t=\dfrac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$. 7. Время движения $T=\dfrac{1}{v_1}\sqrt{a^2+x^2}+$ $+\dfrac{1}{v_2}\sqrt{b^2+(c-x)^2}$, где $c=A_1B_1$ (рис. 239). Условие $\dfrac{dT}{dx}=0$ дает $\dfrac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}=\dfrac{c-x}{v_2\sqrt{b^2-(c+x)^2}}$. Замечая, что $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sin\alpha$, $\dfrac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=\sin\beta$, находим $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{v_1}{v_2}$. Это — закон Снелля, т. е.

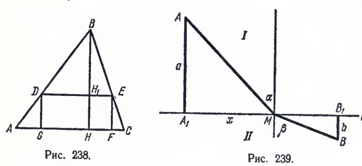


Рис. 238. Рис. 239.

точка должна двигаться так, как движется через границу двух сред световой луч. Для доказательства того, что мы действительно получаем минимум T, достаточно выписать $\dfrac{d^2T}{dx^2}$. Легко убедиться, что при всех x будет $\dfrac{d^2T}{dx^2}>0$.

§ 2

1. $y_{\min}=3$. 2. При $x=0$ $y_{\max}=0$. 3. При $x=0$ $y_{\max}=1$.

§ 3

1. $\dfrac{\pi}{2}$. 2. $\dfrac{\pi}{2}$. 3. $\dfrac{1}{6}$. 4. $2\pi+\dfrac{4}{3}$ и $6\pi-\dfrac{4}{3}$. 5. $a\ln 2$, где a — количество краски, идущее на окраску единицы площади. 6. $\dfrac{37}{12}a$. 7. 10π.

§ 4

1. $\dfrac{x_0}{n+1}$. 2. $\dfrac{m-n}{\ln m-\ln n}$. При $m=n+\nu\ \ln m=\ln(n+\nu)=$ $=\ln n+\ln\left(1+\dfrac{\nu}{n}\right)=\ln n+\dfrac{\nu}{n}-\dfrac{\nu^2}{2n^2}+\ldots;$ $\bar{y}=\dfrac{\nu}{\dfrac{\nu}{n}-\dfrac{\nu}{2n^2}}=$ $=n\left(1+\dfrac{\nu}{2n}\right)=\dfrac{n+m}{2}$. 3. а) Оба средних значения равны $\dfrac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$ и $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$. 4. Если T — период, то должно быть $\sin[\omega(t+T)+\alpha]=\sin(\omega t+\alpha)$, откуда $\omega(t+T)+\alpha=\omega t+\alpha+2\pi$, $\omega T=2\pi$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Но период функции y^2 равен $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$. Следовательно, надо найти среднее значение функции $y=\sin^2(\omega t+\alpha)$ на промежутке от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{\omega}$.

$$\bar{y}=\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin^2(\omega t+\alpha)\,dt}{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(\omega t+\alpha)\right\}dt=\frac{1}{2}.$$

§ 5

1. $S=\int\limits_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$. 2. $S=\int\limits_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$. 3. $S=\frac{4}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2+\frac{b^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$. 4. Выполняя указанную замену переменных, получим $S=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{z^2dz}{z^2-1}$. Найдем $\int\frac{z^2\,dz}{z^2-1}\cdot\int\frac{z^2\,dz}{z^2-1}=\int\frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz=\int\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz=z+\int\frac{dz}{z^2-1}$. В последнем интеграле запишем подынтегральную функцию так:

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}.$$

Числа A и B найдем, выполнив приведение к общему знаменателю и приравняв числители $A(z+1)+B(z-1)=1$, откуда $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$. Окончательно $\int\frac{z^2\,dz}{z^2-1}=z+\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1}$, поэтому $S=\left[z+\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

§ 6

1. Разбивая на участки от $x=0$ до $x=0,9$ и от $x=0,9$ до $x=2$, находим $S_1=1,043$, $S_2=\frac{e^2+e^{-2}}{2}-\frac{e^{0,9}+e^{-0,9}}{2}+$ $+\frac{1}{2}\int\limits_{0,9}^{2}\frac{2}{e^x-e^{-x}}\,dx$. В последнем интеграле можно положить $e^x=t$. Окончательно получим $S_2=2,624$, $S=S_1+S_2+3,667$. По точной формуле находим $S=3,627$. Ошибка составляет 1%. 2. $S=1,146$. 3. Длина дуги окружности, о которой идет речь, есть

$$S=\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{R}\right)^4+\frac{5}{16}\left(\frac{x}{R}\right)^6+\frac{35}{128}\left(\frac{x}{R}\right)^8+\ldots\right\}dx=$$

$$=R\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1+\frac{1}{12}+\frac{3}{160}+\frac{5}{896}+\frac{35}{18432}+\ldots\right\}.$$

Соответственно для числа π получаем:

а) $\pi\approx\frac{4}{\sqrt{2}}\left\{1+\frac{1}{12}+\frac{3}{160}\right\}=3,117$,

б) $\pi\approx\frac{4}{\sqrt{2}}\left\{1+\frac{1}{12}+\frac{3}{160}+\frac{5}{896}\right\}=3,133$,

в) $\pi\approx\frac{4}{\sqrt{2}}\left\{1+\frac{1}{12}+\frac{3}{160}+\frac{5}{896}+\frac{35}{18432}\right\}=3,138$.

§ 7

1. Примем диаметр AB за ось x, точку A за начало координат. Сечение, перпендикулярное к диаметру AB, есть прямоугольный треугольник PQR, его площадь (см. рис. 85) $S(x)=$ $=\frac{1}{2}PQ\cdot QR=\frac{1}{2}PQ^2\operatorname{tg}\alpha$. Но по известной теореме геометрии $PQ^2=AP\cdot PB=x(2R-x)$. Поэтому $S(x)=\frac{1}{2}x(2R-x)\operatorname{tg}\alpha$. $V=\int\limits_0^{2R}S(x)\,dx=\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha$. 3. $V=2\pi$.

§ 8

1. $y_{max}=2$ при $x=0$, $y_{min}=-2$ при $x=2$. 2. Максимумов и минимумов нет. Кривая пересекает ось x в точке $x=1+\sqrt[3]{14}\approx 3{,}4$, а ось y в точке $y=-15$. 3. Максимумов и минимумов нет. Кривая пересекает ось x между точками $x=0$ и $x=-1$, а ось y в точке $y=3$. 4. Три корня. 5. Три корня. 6. Два корня. 7. Один корень.

Глава IV

§ 2

$A(2, 1)$, $B(1, 2)$, $C(0, 3)$, $D(-1, 2)$, $E(-2, 1)$, $F(-3, 0)$, $G(-2, -1)$; $H(-1, 2)$, $K(0, -3)$, $L(1, -2)$, $M(2, -1)$, $N(3, 0)$, $O(0, 0)$.

§ 3

1. См. рис. 240. 2. См. рис. 241. 3. См. рис. 242. 4. $r=\sqrt{2}$, $\alpha=45°$; $r=2\sqrt{2}$, $\alpha=-45°$; $r=3\sqrt{2}$, $\alpha=-135°$; $r=4\sqrt{2}$, $\alpha=135°$. 5. 2; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. 6. $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(4, 6)$ лежат на одной прямой; $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(-2, -3)$ лежат на одной прямой; $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(-2, 3)$ не лежат на одной прямой. 7. $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$; $\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$; см. рис. 243. 8. $(a, 0)$; $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-a, 0)$; $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, см. рис. 244. 9. а) Два случая: $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, см. рис. 245, *а*; $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. б) Четыре случая: $(0, 0)$, $(a, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, см. рис. 245, *б*; $(0, 0)$, $(a, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0, 0)$, $(-a, 0)$, $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0, 0)$, $(-a, 0)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. 10. $A_2(x_1, -y_1)$, $A_3(-x_1, y_1)$, $A_4(-x_1, -y_1)$, см. рис. 246.

(2) y (1)
x
(3) (4)

Рис. 240.

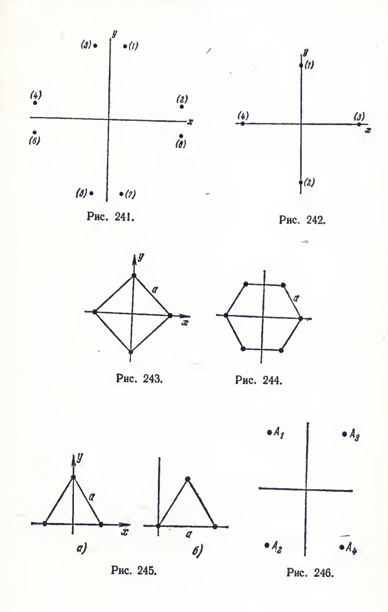


Рис. 241.

Рис. 242.

Рис. 243.

Рис. 244.

Рис. 245.

Рис. 246.

§ 4

См. рис. 247.

§ 7

1. См. рис. 248. 2. См. рис. 249. 3. См. рис. 250.

§ 8

1. Первая кривая приведена на рис. 251. 2. См. рис. 252. 3. См. рис. 253. 4. Искомый график — прямая $y=x$, но не вся прямая, а только ее отрезок от $x=-1$, $y=-1$ до $x=+1$, $y=+1$, см. рис. 254.

5. См. рис. 255. Указание. Параметрические уравнения кривой $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$.

Глава V

§ 3

1. $T \approx 1660$ лет. 2. 176,5 *г*. 3. 53,3 *г*. 4. Мы знаем, что $N(t)=N_0 e^{-\frac{t}{\overline{t}}}$, где N_0 — количество вещества в начальный момент $t=0$. Нас интересует момент времени t_1, к которому осталось $(100-1)\%=99\%$ вещества: $N(t_1)=\frac{99}{100}N_0$. Поэтому $\frac{99}{100}N_0=N_0 e^{-\frac{t_1}{\overline{t}}}$. Отсюда находим $t_1=\overline{t}\ln\frac{100}{99}$. Для радия $\overline{t}=2400$ лет, поэтому $t_1=2400\ln\frac{100}{99}=24$ (года). Аналогично в трех других случаях находим $t_2\approx 250$ лет, $t_3\approx 5500$ лет, $t_4\approx 11\,000$ лет. 5. Пусть в начальный момент времени $t=0$ количество атомов в 10^{12} атомов породы N_0, в момент $t=10\,000$ это количество равно 1. Поэтому $1=N_0 e^{-\frac{10\,000}{2400}}$, откуда $N_0=e^4\approx 65$. Аналогично находим, что 10^6 лет назад $N_0=e^{417}\approx 10^{181}$. Получился явно нелепый результат: в 10^{12} атомов породы содержалось 10^{181} атомов радия! Еще более нелепый результат получится, если подсчитывать содержание радия $5\cdot 10^9$ лет назад. Нелепость результата доказывает неправильность исходного предположения о том, что имеющееся в настоящее время количество радия можно рассматривать как остаток от распада радия, входившего в состав Земли в момент ее образования.

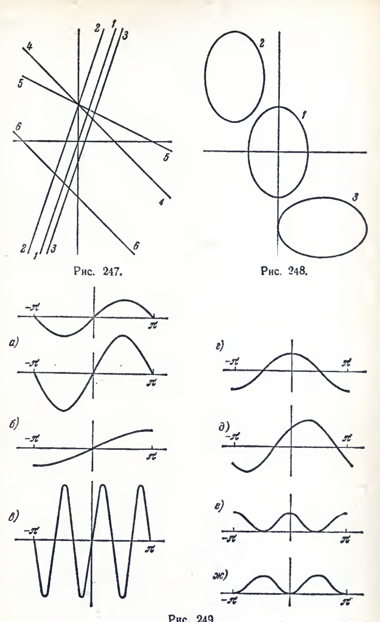


Рис. 247.

Рис. 248.

Рис. 249.

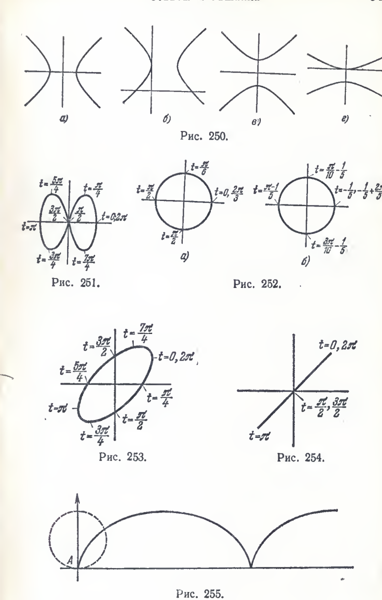


Рис. 250.

Рис. 251.

Рис. 252.

Рис. 253.

Рис. 254.

Рис. 255.

Глава VI

§ 1

1. $A(t) = -h\int\limits_{t_0}^{t} v^2\,dt$, величина A отрицательна, так как $\int\limits_{t_0}^{t} v^2\,dt > 0$. 2. Движение тела периодическое с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Требуется определить работу за полпериода. Заметим, что в течение первой четверти периода скорость положительна, а потому $F = -h$; во второй четверти периода скорость отрицательна, поэтому $F = +h$. В каждом из этих промежутков времени сила постоянна, а потому работа равна произведению силы на путь, пройденный телом за это время. Для первой четверти периода $A_1 = -hb$. Для второй четверти периода $A_2 = h(-b) = -hb$ (скорость отрицательна!). Поэтому работа за полпериода $A = A_1 + A_2 = -2hb$. 3. $A = bf_0\omega_1\int\limits_0^{t_k} \sin\omega_0 t \times$ $\times \cos\omega_1 t\,dt$. Это интеграл легко взять следующим способом. Запишем известные формулы

$$\sin(\omega_0 t + \omega_1 t) = \sin\omega_0 t\cos\omega_1 t + \cos\omega_0 t\sin\omega_1 t,$$
$$\sin(\omega_0 t - \omega_1 t) = \sin\omega_0 t\cos\omega_1 t - \cos\omega_0 t\sin\omega_1 t.$$

Сложив правые и левые части, получим:

$$\sin\omega_0 t\cos\omega_1 t = \frac{1}{2}\left[\sin(\omega_0 + \omega_1)t + \sin(\omega_0 - \omega_1)t\right].$$

Поэтому $A = \frac{bf_0\omega_1}{2}\int\limits_0^{t_k}\left[\sin(\omega_0+\omega_1)t + \sin(\omega_0-\omega_1)t\right]dt =$

$$= \frac{bf_0\omega_1}{2}\left[\frac{1}{\omega_0+\omega_1} + \frac{1}{\omega_0-\omega_1} - \frac{\cos(\omega_0+\omega_1)t_k}{\omega_0+\omega_1} - \frac{\cos(\omega_0-\omega_1)t_k}{\omega_0-\omega_4}\right].$$

В случае $\omega = \omega_0$ пользоваться конечной формулой нельзя. Однако в этом случае $\sin\omega_0 t\cos\omega_1 t = \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t$, откуда

$$A = \frac{bf_0\omega_0}{2}\int\limits_0^{t_k}\sin 2\omega_0 t\,dt = \frac{bf_0}{4}(1 - \cos 2\omega_0 t_k).$$

4. Работа силы сопротивления воздуха $A_1(t) = -\frac{aS\rho g^3}{8}t^4$. Работа силы тяжести $A_2(t) = \frac{mg^2}{2}t^2$. Для шарика: $A_1(1) = -0{,}00965$, $A_1(10) = -96{,}5$, $A_1(100) = -965\cdot 10^3$, $A_2(1) = 0{,}177$, $A_2(10) = 1{,}77$, $A_2(100) = 177$; для пули: $A_1(1) = -1{,}18\cdot 10^{-3}$, $A_1(10) = -11{,}8$, $A_1(100) = -118\cdot 10^3$, $A_2(1) = 0{,}435$, $A_2(10) = 43{,}5$, $A_2(100) = 4350$

(работа выражена в джоулях). **5.** $A=\frac{aS\rho(v_0-v)^2 b}{2}$. Мощность W определяем, пользуясь формулой $W=Fv$, $W=\frac{aS\rho(v_0-v)^2 v}{2}$. Определим, при какой скорости v (при данном v_0) мощность будет максимальной. Для этого решим уравнение $\frac{dW}{dv}=0$. Получим $v_1=v_0$ и $v_2=\frac{v_0}{3}$. Ясно, что значение $v=v_0$ нас не интересует, так как оно обращает мощность в нуль. Интересующее нас значение есть $v=\frac{v_0}{3}$ $\left(\text{читатель может произвести полное исследование по знаку } \frac{d^2W}{dv^2}\right)$. При $v_0=30$ *м/сек*, $v=10$ *м/сек* $W_{max}=2{,}6\cdot10^5$ *кгм/сек* $=3500$ *л. с.* **6.** Работа силы за период $A=cnf\sin\alpha$, $W=+\frac{cf\omega}{2}\sin\alpha$.

§ 3

1. Прямую, на которой расположены заряды, примем за ось x; точку, в которой расположен заряд e_1, примем за начало координат. Заряд e_2 пусть расположен в точке $x=+2a$. Равновесие возможно лишь в тех точках x, где $F=-\frac{du}{dx}=0$. Пусть x — координата заряда e. Тогда $F=\frac{e_1e}{x^2}-\frac{4e_1e}{(2a-x)^2}$, если $0<x<2a$, т. е. если заряд e расположен между зарядами e_1 и e_2, $F=-\frac{e_1e}{x^2}-\frac{4e_1e}{(2a-x)^2}$, если $x<0$, и $F=\frac{e_1e}{x^2}+\frac{4e_1e}{(2a-x)^2}$, если $x>2a$. В первом случае уравнение $F=0$ дает $x_1=2a/3$, $x_2=-2a$. Второй корень x_2 отбрасываем, так как должно быть $x>0$. В случаях $x<0$ и $x>2a$ уравнение $F=0$ решений не имеет. Следовательно, имеется одно положение равновесия $x_1=2a/3$. Исследуем точку $x_1=2a/3$. Для этого подсчитаем $\frac{d^2u}{dx^2}$ в этой точке. Произведя подсчет, убеждаемся, что если $e>0$, то $\frac{d^2u}{dx^2}>0$, равновесие устойчиво; если же $e<0$, то равновесие неустойчиво. **2.** Имеется одно положение равновесия x_1 вне зарядов. Если система координат выбрана так же, как в решении задачи 1, то $x_1=-2a$. Если $ee_1>0$, то равновесие устойчивое; если $e_1e<0$, то равновесие неустойчивое.

§ 4

1. Уравнение движения $m\frac{dv}{dt}=F$; пользуясь тем, что при $t=0$ $v=0$, находим $v=\frac{F}{m}t$. Поэтому $\frac{dx}{dt}=\frac{F}{m}t$, $dx=\frac{F}{m}t\,dt$; откуда

18*

$\int\limits_0^x dx=\frac{F}{m}\int\limits_0^t t\,dt$, так как при $t=0$ $x=0$. Окончательно $x=\frac{F}{2m}t^2$. **2.** $x=v_0t+\frac{F}{2m}t^2$. **3.** $x=x_0+v_0t+\frac{F}{2m}t^2$. **4.** 24,5 *м*. **5.** Уравнение движения есть $m\frac{dv}{dt}=mg$; отсюда находим $x=\frac{gt^2}{2}$, $t=\sqrt{\frac{2x}{g}}\approx 4{,}5$ *сек* при $x=100$ *м*. **6.** а) $t=3{,}6$ *сек*, б) $t=5{,}6$ *сек*. Определим в каждом из случаев скорость в момент приземления. В случае а) $v=gt+v_0$. Пусть $v_п$ есть скорость в момент приземления, тогда $v_п=gt_п+v_0$, где $t_п$—время приземления. Из уравнения $v=gt+v_0$ находим $x=v_0t+\frac{gt^2}{2}$. Пусть шарик падает с высоты H; тогда $x=H$ при $t=t_п$, поэтому $2H=2v_0t_п+gt_п^2$, откуда $t_п=\frac{-v_0+\sqrt{v_0^2+2gH}}{g}$, поэтому $v_п=gt_п+v_0=\sqrt{v_0^2+2gH}$. В случае б) $v=gt-v_0$, остальное аналогично; конечная скорость получается такая же, как в а). **7.** $x=\frac{k}{6m}t^3+v_0t$. **8.** а) $x=-\frac{f}{m\omega^2}\cos\omega t$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $x_{\max}=\frac{f}{m\omega^2}$, $v_{\max}=\frac{f}{m\omega}$. б) $x=\frac{f}{m\omega}t-\frac{f}{m\omega^2}\sin\omega t$. **9.** Пусть искомая скорость есть v_0. Тогда закон движения тела $x=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{F}{2m}(t-t_0)^2$. При $t=t_1$ $x=x_1$, поэтому $x_1=x_0+v_0(t_1-t_0)+\frac{F}{2m}(t_1-t_0)^2$, откуда

$$v_0=\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0}-\frac{F}{2m}(t_1-t_0).$$

§ 6

1. $K=\frac{F^2}{2m}t^2=F(x-x_0)$. **2.** $K=\frac{f^2}{2m\omega^2}\sin^2\omega t$; $K_{\max}=\frac{f^2}{2m\omega^2}$. **3.** $\overline{K}=\frac{mA^2\omega^2}{2}\overline{\sin^2(\omega t+\alpha)}=\frac{mA^2\omega^2}{4}$. **5.** а) $A=A\cdot 10^6$ *кгм*, $W=300$ *л. с.* б) $A=7\cdot 10^6$ *кгм*, $W=520$ *л. с.* **6.** Определим работу каждой из сил в отдельности. Для этого предварительно определим скорость тела. Из уравнения $m\frac{dv}{dt}=at+a(\theta-t)=a\theta$ находим $v=v_0+\frac{a\theta}{m}t$. Работа силы F_1 есть $A_1=\int\limits_0^\theta at\left(v_0+\frac{a\theta}{m}t\right)dt=\frac{av_0\theta^2}{2}+\frac{a^2\theta^4}{3m}$. Аналогично на-

ходим A_2 — работу силы F_2. $A_2=\frac{av_0\theta^2}{2}+\frac{a^2\theta^4}{6m}$. Составим произведение импульса на среднюю скорость:

$$I_1=\int_0^\theta at\,dt=\frac{a\theta^2}{2},\quad I_2=\int_0^\theta a(\theta-t)\,dt=\frac{a\theta^2}{2},$$

$$\overline{v}=\frac{\int_0^\theta\left(v_0+\frac{a\theta}{m}t\right)dt}{\theta}=v_0+\frac{a}{2m}\theta^2,$$

$$I_1\overline{v}=\frac{a\theta^2}{2}\left(v_0+\frac{a}{2m}\theta^2\right),\quad I_2\overline{v}=\frac{a\theta^2}{2}\left(v_0+\frac{a}{2m}\theta^2\right).$$

Видно, что $(I_1+I_2)\overline{v}=A_1+A_2$, хотя $I_2\overline{v}\neq A_1$, $I_2\overline{v}\neq A_2$, как и было отмечено в § 6. 7. В начале опыта масса m имела скорость v_0 (она двигалась вместе с поездом) и кинетическую энергию $K_1=\frac{mv_0^2}{2}$. После действия человека скорость массы стала v_0+v_1, $K_2=\frac{m(v_0+v_1)^2}{2}$, где $v_1=\frac{Ft}{m}$. Изменение кинетической энергии $\Delta K=K_2-K_1=\frac{m(v_0+v_1)^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}$. Это есть работа, произведенная над массой поездом и человеком вместе. Для того чтобы определить работу, произведенную над массой m человеком, заметим, что скорость массы по отношению к человеку, едущему в том же поезде, была равной нулю до опыта и стала равной v_1 после опыта. Поэтому работа человека $A_1=\frac{mv_1^2}{2}-0=\frac{mv_1^2}{2}=\frac{F^2t^2}{2m}$. Теперь легко определить работу паровоза A_2: $A_2=\Delta K-A_1=mv_0v_1=v_0Ft$. Последний результат легко получить и из других соображений. Действительно, работа паровоза $A_2=\int_0^t vF\,dt$. Так как скорость $v=v_0$ постоянна, то $A_2=v_0\int_0^t F\,dt=v_0Ft$. 8. До начала опыта скорость массы m и скорость человека равны нулю. После опыта масса m приобрела скорость v_1, человек приобрел скорость v_2. Определим эти скорости из уравнений $m\frac{dv_1}{dt}=F$ и $M\frac{dv_2}{dt}=-F$, так как если человек действует на массу m силой F, то масса m действует на человека силой $-F$. Находим $v_1=\frac{Ft}{m}$, $v_2=-\frac{Ft}{M}$. Работа, произведенная

силой F над массой m и над человеком, есть $A=K_1+K_2$, где $K_1=\frac{mv_1^2}{2}=\frac{F^2t^2}{2m}$ — изменение кинетической энергии массы m, $K_2=\frac{Mv_2^2}{2}=\frac{F^2t^2}{2M}$ — изменение кинетической энергии человека. Отсюда $A=\frac{F^2t^2(M+m)}{2Mm}$. **9.** Изменение кинетической энергии массы m $\Delta K_m=mv_0v_1+\frac{mv_1^2}{2}$, где $v_1=\frac{F}{m}t$; изменение кинетической энергии человека $\Delta K_M=\frac{Mv_2^2}{2}+Mv_0v_2$, где $v_2=-\frac{F}{M}t$, $A=\frac{F^2t^2(M+m)}{2Mm}$.

§ 7

1. Запишем уравнение так: $\frac{dt}{dv}=\frac{1}{\beta(v_1^2-v^2)}$, откуда (учитывая начальное условие $v(0)=v_0$) находим $t=\frac{1}{\beta}\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv}{v_1^2-v^2}$. Для того чтобы выполнить интегрирование, надо записать подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{v_1^2-v^2}=\frac{a}{v_1-v}+\frac{b}{v_1+v}$ и определить числа a и b (см. упражнения к § 15 главы II), после чего интеграл легко взять. Получим $\ln\frac{v_1+v}{v_1-v}=\ln A+2\beta v_1t$, где $A=\frac{v_1+v_0}{v_1-v_0}$. Потенцируя, найдем $\frac{v_1+v}{v_1-v}=Ae^{2\beta v_1t}$, откуда $v=v_1\frac{Ae^{2\beta v_1t}-1}{Ae^{2\beta v_1t}+1}$. При очень больших t величина $e^{2\beta v_1t}\gg 1$, поэтому для таких t будет $v\approx v_1$. Перепишем решение уравнения в виде $v=v_1\frac{A-e^{-2\beta v_1t}}{A+e^{-2\beta v_1t}}$; вычитая из обеих частей по v_1, получим $v-v_1=-2v_1\frac{e^{-2\beta v_1t}}{A+e^{-2\beta v_1t}}$. При весьма больших t в знаменателе можно пренебречь $e^{-2\beta v_1t}$ по сравнению с A. Поэтому при весьма больших t $v-v_1=-2v_1\frac{e^{-2\beta v_1t}}{A}$ или $v-v_1=$ $=\frac{2v_1(v_0-v_1)}{v_1+v_0}e^{-2\beta v_1t}$; сравнивая это с (7.20), находим $C=\frac{2v_1(v_0-v_1)}{v_1+v_0}$.

2. Для случая сопротивления, пропорционального скорости, уравнение движения примет вид $\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v-\frac{A}{m}$, где A — выталкивающая сила. В этом случае происходит установление скорости $v_1=\frac{g}{\alpha}-\frac{A}{m\alpha}$. По закону Архимеда $A=V\rho'g$, где V — объем тела,

$\rho_ж$ — плотность жидкости. Так как $m = V\rho_т$ (ρ — плотность тела), то $A = mg \cdot \rho'/\rho$, и $v_1 = \frac{g}{\alpha}\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$. При $\rho' > \rho$ тело всплывает ($v_1 < 0$), а при $\rho' < \rho$ — погружается ($v_1 > 0$).

§ 8

2. а) Точка остановки $x_0 = \frac{1}{4}$. б) Точка остановки $x \approx 0,95$. в) Точек остановки нет. **3.** Прежде всего определим положение максимума $u(x)$. Получаем $u_{max} \approx 9,5$ при $x_0 = 8/3$. Замечая, что левая ветвь графика уходит вверх, а правая — вниз, можем построить очень грубый график $u(x)$. Однако для решения задачи достаточно располагать таким графиком. а) Две точки остановки. Это — значения наименьших корней уравнения $-x^3 + 4x^2 = 6$. Такое уравнение можно решить либо графически, либо при помощи одного из численных методов. Получим $x_1 \approx -1,09$, $x_2 \approx 1,57$. Тело совершает колебания между точками x_1 и x_2. б) Одна точка остановки $x \approx -2,04$. Однако эта точка остановки расположена левее точки, из которой выходит тело в начальный момент времени. Так как начальная скорость направлена вправо, то тело уйдет вправо, не побывав в точке остановки. в) Одна точка остановки $x \approx -2,04$. В этом случае тело пройдет влево до точки остановки, а затем уйдет вправо. **4.** а) Точек остановки нет. Тело уйдет вправо. б) Две точки остановки $x_1 = +\sqrt{9/11}$, $x_2 = -\sqrt{9/11}$. Движение тела — колебание между точками x_1 и x_2. Для а) $t = t_0 + \int\limits_0^x \sqrt{\frac{1+x^2}{4+3x^2}}\,dx$. Для б) $t = t_0 + \int\limits_{0,5}^x \sqrt{\frac{20+20x^2}{9-11x^2}}\,dx$ для $x < x_1$, $t = t_1 - \int\limits_{x_1}^x \sqrt{\frac{20+20x^2}{9-11x^2}}\,dx$ при $x_1 < x < x_2$, где t_1 — время достижения x_1, и т. д. Следует заметить, что интегралы остаются конечными, хотя в точках остановки подынтегральная функция обращается в бесконечность.

§ 9

1. а) $x = 2\sin t$, б) $x = \cos t$, в) $x = \cos t + 2\sin t$. Это решение можно записать в виде $x = C\cos(t+\alpha)$, где $C = \sqrt{5}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(-2) \approx -1,11$, т. е. $x = \sqrt{5}\cos(t - 1,11)$. Во всех трех случаях $T = 2\pi$.

§ 10

1. Будем считать, что колебания происходят по закону $x = C\cos(\omega t + \alpha)$; тогда $v = -C\omega\sin(\omega t + \alpha)$. Воспользуемся соотношением $kC\frac{dC}{dt} = F_1 v$, где

$$F_1 = -hv\,|v|, \quad F_1 v = -hv^2\,|v| = -hC^3\omega^3\,|\sin^3(\omega t + \alpha)|.$$

Поэтому $kC\frac{dC}{dt}=-hC^3\omega^3 A$, где положено $A=\overline{|\sin^3(\omega t+\alpha)|}$. Заметим, что $\sin(\omega t+\alpha)$ сохраняет знак при изменении t от $t_1=-\frac{\alpha}{\omega}$ до $t_2=\frac{\pi-\alpha}{\omega}$, причем $t_2-t_1=\frac{T}{2}$. Поэтому

$$A=\frac{\int\limits_{t_1}^{t_2}\sin^3(\omega t+\alpha)\,dt}{t_2-t_1}=\frac{\omega}{\pi}\int\limits_{-\frac{\alpha}{\omega}}^{\frac{\pi-\alpha}{\omega}}\sin^3(\omega t+\alpha)\,dt.$$

Полагая в последнем интеграле $\cos(\omega t+\alpha)=x$, получим

$$A=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{-1}(1-x^2)\,dx=\frac{4}{3\pi}.$$

Поэтому $\frac{dC}{dt}=-\frac{hC^2\omega^3 4}{3\pi k}$. Обозначим $\frac{h\omega^3 4}{3\pi k}=b$, тогда $\frac{dC}{dt}=bC^2$, откуда $\frac{dt}{dC}=-\frac{1}{bC^2}$. Решением этого уравнения является $t=-\frac{1}{b}\frac{C-C_0}{CC_0}$. Выражая C через t, находим $C=\frac{C_0}{1+C_0bt}$. Здесь через C_0 обозначено значение амплитуды в начальный момент времени $t=0$; оно определяется из начальных условий. Отметим, что такой же закон мы получили для затухания скорости в случае сопротивления, пропорционального квадрату скорости [см. формулу (7.12)]. 2. В этом случае работа за четверть периода равна $-fC$, поэтому средняя мощность есть $-fC\frac{4}{T}=-fC\frac{2\omega}{\pi}$. Получаем уравнение $kC\frac{dC}{dt}=-\frac{2fC\omega}{\pi}$, откуда $\frac{dC}{dt}=-\frac{2f\omega}{k\pi}$.

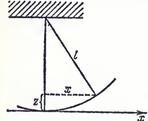


Рис. 256.

Отсюда $C=C_0-\frac{2f\omega}{k\pi}t$. Колебания прекратятся в момент t_1, когда станет $C=0$, поэтому $t_1=\frac{C_0k\pi}{2f\omega}$ (предполагается, что $t_1\gg T$). 3. Пусть маятник при $x=0$ (положение равновесия) имеет потенциальную энергию u_0, кинетическая энергия в этот момент равна нулю. Отклоним маятник на некоторый угол; в результате этого по горизонтали он отклонится на величину x (рис. 256). В этом положении потенциальная энергия $u_1=u_0+mgz$, где $z=l-\sqrt{l^2-x^2}$; кинетическая энергия равна

$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)$. В процессе колебаний сумма кинетической и потенциальной энергии не изменяется, поэтому $u_0+mg\left(l-\sqrt{l^2-x^2}\right)+\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=u_0$ или $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2g\left(l-\sqrt{l^2-x^2}\right)$. Теперь воспользуемся тем, что $x\ll l$ (колебания малые), т. е. $\frac{x}{l}\ll 1$. Благодаря этому $\sqrt{l^2-x^2}$ можно записать при помощи ряда Маклорена: $\sqrt{l^2-x^2}=l\sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2}\approx l\left(1-\frac{x^2}{2l^2}\right)=l-\frac{x^2}{2l}$ (мы удержали два члена

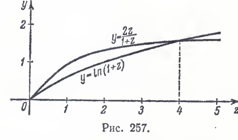


Рис. 257.

ряда). Уравнение колебаний принимает вид $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=g\frac{x^2}{l}$. Возьмем от обеих частей производную по t, получим $2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=2g\frac{x}{l}\frac{dx}{dt}$, откуда $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g}{l}x$. Это и есть уравнение малых колебаний маятника.

§ 11

1. Из первого уравнения системы получаем $C_0\cos\alpha=x_0-a$. Пользуясь этим, из второго уравнения нетрудно найти $C_0\sin\alpha=b\frac{\omega}{\omega_1}-\frac{v_0}{\omega_1}-\gamma\frac{x_0-a}{\omega_1}$. Возведя полученные соотношения в квадрат, получим $C_0^2=\left(b\frac{\omega}{\omega_1}-\frac{v_0}{\omega_1}-\gamma\frac{x_0-a}{\omega_1}\right)^2+(x_0-a)^2$; извлекая корень, находим C_0; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b\frac{\omega}{\omega_1}-\frac{v_0}{\omega_1}-\gamma\frac{x_0-a}{\omega_1}}{x_0-a}$.

§ 13

1. Задача сводится к определению z из уравнения $\ln(1+z)=\frac{2z}{1+z}$. Решим это уравнение графически. Для этого определим

на графике точку пересечения линий $y=\ln(1+z)$ и $y=\frac{2z}{1+z}$. Из графика рис. 257 видно, что $z\approx 4$. Поэтому $\eta_{max}=0{,}65\alpha$. 2. $r\approx 30\,000$ *км*.

§ 14

1. Для $\varphi=30°$ $x_{max}=565$ *м*, $y_{max}=81{,}5$ *м*; для $\varphi=45°$ $x_{max}=650$ *м*, $y_{max}=163$ *м*; для $\varphi=60°$ $x_{max}=565$ *м*, $y_{max}=244$ *м*. 2. Уравнение траектории имеет вид $y=x\operatorname{tg}\varphi-x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}$. При заданном $x=500$ *м* ищем φ, при котором y достигает максимума. Для этого решаем уравнение $\frac{dy}{d\varphi}=0$. Получаем $\operatorname{tg}\varphi=\frac{v_0^2}{gx}$. Пользуясь тождеством $\frac{1}{\cos^2\varphi}=\operatorname{tg}^2\varphi+1$, получаем $\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{v_0^4+g^2x^2}{g^2x^2}$. Пользуясь этим, из уравнения траектории находим $y_{max}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{x^2g}{2v_0^2}$. Полагая $v_0=80$ *м/сек*, $x=500$ *м*, находим $y_{max}=135$ *м*.

§ 15

1. Поместив начало координат в центр тяжести стержня, получаем:

$$I_0=\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}x^2\rho\,dx=\rho\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}x^2\,dx=\rho\frac{l^3}{12};$$

так как $m=\rho l$, то результат можно записать так: $I_0=m\frac{l^2}{12}$. 2. Поместим начало координат в точку стыка кусков различной плотности, так что для первого куска $x<0$, а для второго $x>0$. Тогда $x_C=\frac{\rho_2l_2^2-\rho_1l_1^2}{2(l_1\rho_1+l_2\rho_2)}$. 3. Выбрав систему координат согласно указанию, получаем $x_C=\frac{2}{3}L$, момент инерции относительно начала $I=\int_0^L x^2\rho(x)\,dx=\frac{aL^4}{4}$. Так как $m=\frac{aL^2}{2}$, то $a=\frac{2m}{L^2}$; поэтому $I=\frac{mL^2}{2}$. Но $I_0=I-ml_1^2$, где $l_1=\frac{2}{3}L$; отсюда $I_0=\frac{mL^2}{18}$.

§ 16

1. а) Обозначим через L длину маятника. Мы знаем, что $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$, причем в нашем случае $l = \frac{2}{3}L$, $I = \frac{mL^2}{2}$ (см. упражнения к § 15). Поэтому

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3L}} = \sqrt{\frac{8g}{9l}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3L}{4g}} \approx 5{,}43\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Значение l, которому соответствует максимальная частота, определяется по формуле $l_{max} = \sqrt{\frac{I_0}{m}}$. Так как в нашем случае $I_0 = \frac{mL^2}{18}$, то $l_{max} = \frac{L}{\sqrt{18}}$. Поэтому $\omega_{max} = \sqrt{\frac{g\sqrt{18}}{2L}}$. Зная ω_{max}, находим $T_{min} = \frac{2\pi}{\omega_{max}}$. б) В этом случае $l = \frac{1}{3}L$, $I = I_0 + ml^2 = \frac{mL^2}{18} + \frac{1}{9}mL^2 = \frac{mL^2}{6}$, $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$. Минимальный период здесь получится тот же, что и в случае а), для другой точки подвески с тем же значением l_{max}.

Глава VII

§ 3

1. $p = 1{,}13p_0$, $p = 1{,}48p_0$, $p = 3{,}67p_0$, где p_0 — давление воздуха на поверхности земли. 2. Зависимость давления от высоты дается формулой $p = p_0 e^{-\frac{gh}{b}}$, где $b = \frac{RT}{M}$. Для температуры $-40°$ С $T = 273 - 40 = 233$, $b = \frac{8{,}3\cdot10^7\cdot233}{29{,}4} = 6{,}6\cdot10^8$ *см²/сек²*. В этом случае $H = \frac{b}{g} = 6{,}6$ *км*. Для температуры $+40°$ С $T = 313$, $b = 8{,}8 \times 10^8$ *см²/сек²*, $H = 8{,}8$ *км*. 3. Из уравнения $\frac{dT}{dh} = -\alpha T_0$ находим $T = -\alpha T_0 h + C$. Постоянную C определим из условия, что при $h = 0$ $T = T_0$. Получим $C = T_0$, поэтому $T = T_0(1 - \alpha h)$. Основное уравнение для определения плотности $\frac{dp}{dh} = -g\rho$. Воспользуемся уравнением Клапейрона $p = \rho\frac{RT}{M}$; подставляя сюда выражение для T, находим $p = \rho\frac{RT_0(1-\alpha h)}{M}$. Положим $\frac{RT_0}{M} = b_0$, тогда $p = \rho b_0(1 - \alpha h)$, откуда $\rho = \frac{p}{b_0(1-\alpha h)}$. Дифференциальное уравне-

ние принимает вид $\frac{dp}{dh}=-g\frac{p}{b_0(1-\alpha h)}$. Перепишем его так: $\frac{dp}{p}=-\frac{g\,dh}{b_0(1-\alpha h)}$. Возьмем интегралы от обеих частей $\ln p = =\frac{g}{b_0\alpha}\ln(1-\alpha h)+C$. Потенцируя, получаем $p=(1-\alpha h)^{\frac{g}{b_0\alpha}}e^C$. Так как при $h=0$ $p=p_0$, то $e^C=p_0$, поэтому $p=p_0(1-\alpha h)^{\frac{g}{b_0\alpha}}$. **4.** $p=p_0(1-0{,}037\cdot 10^{-5}h)^{3,46}$. $p=1{,}13p_0$, $p=1{,}44p_0$, $p_0=2{,}97p_0$.

Глава VIII

§ 2

1. Ток в схеме убывает по закону $j=j_0e^{-\frac{t}{RC}}$. В интересующий нас момент времени t_1 $j=\frac{9}{10}j_0$, поэтому $\frac{9}{10}j_0=j_0e^{-\frac{t_1}{RC}}$, откуда $\frac{9}{10}=e^{-\frac{t_1}{RC}}$. Логарифмируя последнее равенство, находим $\ln\frac{9}{10}= =-\frac{t_1}{RC}$, откуда $t_1=RC\ln\frac{9}{10}\approx 0{,}105\,RC$. Пользуясь этой формулой, находим для $R=10^7$ *ом* $t_1=1$ *сек*; для $R=10^8$ *ом* $t_1=10{,}5$ *сек*; для $R=10^9$ *ом* $t_1=105$ *сек*. Момент t_2, когда ток упадет вдвое, определяем аналогично: $0{,}5j_0=j_0e^{-\frac{t_2}{RC}}$, откуда $t_2=0{,}693RC$. При $R=10^7$ *ом* $t_2=6{,}93$ *сек*; при $R=10^8$ *ом* $t_2=69{,}3$ *сек*; при $R=10^9$ *ом* $t_2=693$ *сек*. **2.** Воспользуемся формулой (1.11), получим $\varphi_{C_1}+\varphi_R+\varphi_{C_2}=0$, откуда $\varphi_R=-(\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2})$. Ток в цепи всюду одинаков, поэтому $j=C_1\frac{d\varphi_{C_1}}{dt}=C_2\frac{d\varphi_{C_2}}{dt}=\frac{\varphi_R}{R}= =-\frac{\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2}}{R}$. Получаем уравнения $\frac{d\varphi_{C_1}}{dt}=-\frac{1}{RC_1}(\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2})$, $\frac{d\varphi_{C_2}}{dt}=-\frac{1}{RC_2}(\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2})$. Сложив эти уравнения, получим $\frac{d(\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2})}{dt}=\frac{\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2}}{RC}$, где положено $C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ (величина C есть емкость двух последовательно соединенных конденсаторов с емкостями C_1 и C_2). Так как $\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2}=a$ при $t=0$, то из последнего уравнения находим $\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2}=ae^{-\frac{t}{RC}}$. Ясно, что $C_1\frac{d\varphi_{C_1}}{dt}-C_2\frac{d\varphi_{C_2}}{dt}=0$ или $\frac{d}{dt}(C_1\varphi_{C_1}-C_2\varphi_{C_2})=0$. Поэтому $C_1\varphi_{C_1}- -C_2\varphi_{C_2}=A$, где A — постоянная. Пользуясь начальным условием

$\varphi_{C_1}=a$, $\varphi_{C_2}=0$ при $t=0$, находим $A=C_1\alpha$. Итак, $\varphi_{C_1}+\varphi_{C_2}=$ $=ae^{-\frac{t}{RC}}$, $C_1\varphi_{C_2}-C_2\varphi_{C_2}=C_1a$. Отсюда находим $\varphi_{C_1}=$ $=a\frac{C_1}{C_1+C_2}\left(1+\frac{C_2}{C_1}e^{-\frac{t}{RC}}\right)$, $\varphi_{C_2}=a\frac{C_1}{C_1+C_2}\left(-1+e^{-\frac{t}{RC}}\right)$. **3.** Величины, относящиеся к контуру до увеличения всех линейных размеров, отметим индексом 1, после увеличения размеров — индексом 2. Тогда $T_1=R_1C_1$, $T_2=R_2C_2$, $C_2=\frac{\varepsilon S_2}{4\pi d_2}=\frac{\varepsilon\cdot n^2S_1}{4\pi d_1 n}=nC_1$. $R_1=\rho\frac{l_1}{\sigma_1}$, $R_2=\rho\frac{l_2}{\sigma_2}=\rho\frac{nl_1}{n^2\sigma_1}=\frac{R_1}{n}$. Поэтому $T_2=R_2C_2=\frac{R_1}{n}nC_1=R_1C_1=T_1$. Постоянная времени не изменилась.

§ 8

1. $\cos\alpha=\frac{\varphi_0}{\sqrt{\varphi_0^2+\frac{L}{C}j_0^2}}$. **2.** Пусть разность потенциалов на пластинах конденсатора равна φ. Для схемы рис. 198 $\varphi_E+\varphi_L+\varphi_C=0$ или, учитывая, что $\varphi_E=-E_0$, $L\frac{dj}{dt}+\varphi=E_0$. Так как $j=C\frac{d\varphi}{dt}$, то $LC\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\varphi=E_0$. Запишем это уравнение в виде $LC\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-(\varphi-E_0)$. Положим $z=\varphi-E_0$; тогда уравнение принимает вид $LC\frac{d^2z}{dt^2}=-z$. Его решение есть $z=A\cos\omega t+B\sin\omega t$, где $\omega=1/\sqrt{LC}$. Поэтому $\varphi=A\cos\omega t+B\sin\omega t+E_0$. При $t=0$ $\varphi=0$, $j=0$. Пользуясь этим, находим $A=-E_0$, $B=0$. Окончательно $\varphi=E_0(1-\cos\omega t)$. Максимальное значение φ получается при $\cos\omega t=-1$, т. е. при $t=\pi/\omega=T/2$ (через половину периода колебаний), $\varphi_{\text{макс}}=2E_0$. **3.** Энергия емкости $W=C\varphi^2/2=$ $=4CE_0^2/2=2CE_0^2$. Энергия, отданная источником напряжения, $P=qE_0=C\varphi E_0=2CE_0^2$.

§ 9

1. $j(t)=-\frac{\varphi_0}{L\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t$, где $\lambda=\frac{R}{2L}$, $\omega^2=\frac{1}{LC}-\lambda^2$. Для трех заданных случаев получим: $j(t)=-1{,}0025^{-0{,}05t}\sin t$; $j(t)=-1{,}031e^{-0{,}25t}\sin 0{,}97t$; $j(t)=-1{,}15e^{-0{,}5t}\sin 0{,}87t$.
2. $j(t)=j_0\left(\cos\omega t-\frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-\lambda t}$, формулы для λ и ω см. 1. Для заданных случаев $j(t)=e^{-0{,}05t}(-\cos t+0{,}05\sin t)$; $j(t)=e^{-0{,}25t}(-\cos 0{,}97t+0{,}26\sin 0{,}97t)$; $j(t)=^{-0{,}5t}(-\cos 0{,}86t+$

$+0,58\sin 0,86t$). 3. Если R велико, то ток через сопротивление мал, т. е. в основном ток идет через индуктивность. Поэтому, чем больше R, тем ближе эта схема к схеме рис. 196, где $\varphi=\varphi_0\cos(\omega t+\alpha)$. Если R велико, то можно считать, что в схеме рис. 200 φ имеет такой же вид, но φ_0 есть медленно меняющаяся со временем величина. Воспользуемся соотношением $\frac{dP}{dt}=-\overline{h}$. Но $h=Rj_1^2$, где j_1 есть ток, текущий через сопротивление R, $j_1=\varphi/R$. Поэтому $h=\frac{\varphi^2}{R}=\frac{\varphi_0^2\cos^2(\omega t+\alpha)}{R}$, $\overline{h}=\frac{\varphi_0^2}{2R}$. Итак, $\frac{dP}{dt}=-\frac{\varphi_0^2}{2R}$. Замечая, что $P=\frac{C\varphi_0^2}{2}$, находим $\frac{dP}{dt}=C\varphi_0\frac{d\varphi_0}{dt}=-\frac{\varphi_0}{2R}$. Отсюда $\frac{d\varphi_0}{dt}=-\frac{1}{2RC}\varphi_0$. Поэтому $\varphi_0=Ae^{-\frac{t}{2RC}}$; $\lambda=\frac{1}{2RC}$.

§ 10

1. $\varphi(t)=e^{-t}+te^{-t}$; $\varphi(t)=-0,03e^{-5,83t}+1,03e^{-0,17t}$. $\varphi(t)=-0,01e^{-9,9t}+1,01e^{-0,1t}$. 2. $\varphi(t)=e^{-t}+2te^{-t}$; $\varphi(t)=-0,37e^{-3,73t}+1,37e^{-0,27t}$.

Добавление

§ 2

1. Вблизи точки $x=x_0$ разлагаем функцию $\varphi(x)$ в ряд с точностью до малых второго порядка: $\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)=\varphi'(x_0)(x-x_0)$. Таким образом, обозначив $\varphi'(x_0)=c$, $x-x_0=y$, мы получим $\delta(\varphi(x))=\delta(cy)=\frac{1}{|c|}\delta(y)=$ $=\frac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x-x_0)$.

2. Функция $\varphi(x)=\sin x$ обращается в нуль при $x_0=k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm\infty$; $|\varphi'(x_0)|=|\cos x_0|=|\cos k\pi|=1$; поэтому

$$\delta(\sin x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-k\pi) \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,\delta(\sin x)\,dx=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\psi(k\pi).$$

§ 3

1а. $y'(x)=1-\delta(x-1)$. 1б. *Решение:* $y(+0)=1$, $y(-0)=0$, скачок y при $x=0$: $\Delta y=1$; при $x\neq 0$ $y'(x)=$ $=-\frac{e^{1/x}}{x^2\left(1+e^{1/x}\right)^2}$; поэтому окончательно $y'(x)=\delta(x)-\frac{e^{1/x}}{x^2\left(1+e^{1/x}\right)^2}$.

§ 5

1. Приравнивая нулю (равновесие!) сумму проекций сил на направление оси y, получим для случая малых отклонений ($y \leqslant l$): $1-k\frac{y_1}{x_1}-k\frac{y_1}{l-x_1}=0$. Отсюда $y_1\ (x_1)=1 \Big/ \left(\frac{k}{x_1}+\frac{k}{l-x_1}\right)=\frac{x_1(l-x_1)}{kl}$,

$$y(x, x_1)=\begin{cases} \left(\frac{x}{x_1}\right) \Big/ \left(\frac{k}{x_1}+\frac{k}{l-x_1}\right)=\frac{x(l-x_1)}{kl}, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \left(\frac{l-x}{l-x_1}\right) \Big/ \left(\frac{k}{x_1}+\frac{k}{l-x_1}\right)=\frac{x_1(l-x)}{kl}, & x_1 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Эта функция $y(x, x_1)$ и называется функцией Грина задачи о струне. При произвольно распределенной силе $f(x)$ отклонение струны дается формулой $y(x)=\int\limits_0^l f(x_1)\, y(x, x_1)\, dx_1$. Отметим, что с помощью функции Грина мы нашли решение для функции $y(x)$, даже не зная, какому уравнению она подчиняется (это уравнение имеет вид $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f(x)}{k}$, $y(0)=0$, $y(l)=0$).

2. Общее решение уравнения без вынуждающей силы есть $x(t)=c_1 \sin \omega t+c_2 \cos \omega t$, $\omega=\sqrt{k/m}$, c_1 и c_2 — произвольные константы. Так как δ-функция отлична от нуля только при $t=\tau$, то решение уравнения с δ-образной силой и состоянием покоя при $t=-\infty$ имеет вид

$$x(t)=\begin{cases} 0, & -\infty < t < \tau, \\ c_1 \sin \omega t+c_2 \cos \omega t, & \tau < t < +\infty. \end{cases}$$

δ-образная сила сообщает телу единичный импульс, поэтому покоящееся тело после действия δ-силы приобретает начальную скорость $v_0=\frac{\Delta p}{m}=\frac{1}{m}$, начальное положение остается равным нулю. Решение уравнения колебаний с такими начальными условиями в момент $t=\tau$ есть

$$x(t, \tau)=\begin{cases} 0, & -\infty < t < \tau, \\ \frac{1}{m\omega} \sin \omega (t-\tau), & \tau < t < +\infty. \end{cases}$$

Иначе говоря, в предыдущей формуле

$$c_1=\frac{\cos \omega\tau}{m\omega}, \qquad c_2=-\frac{\sin \omega\tau}{m\omega}.$$

Решение задачи с произвольной силой $f(t)$ дается формулой

$$x(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, x(t, \tau)\, d\tau=\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau) \frac{1}{m\omega} \sin \omega (t-\tau)\, d\tau.$$

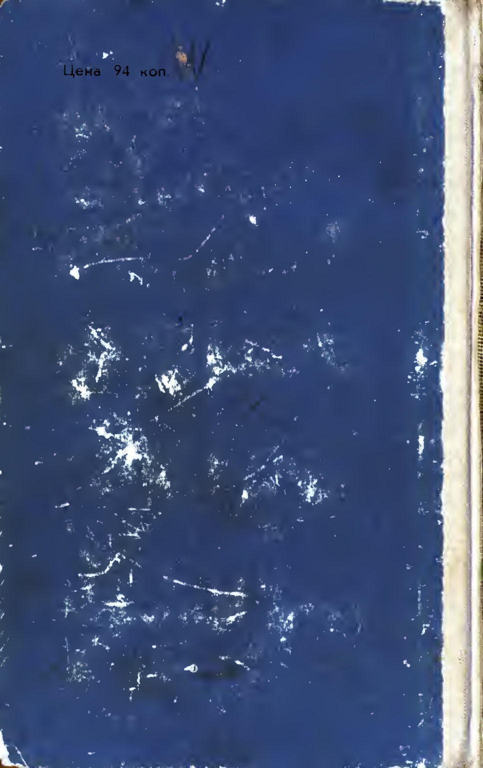
ПРИЛОЖЕНИЕ

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы	Название	Буквы	Название	Буквы	Название	Буквы	Название
A a	а	*H h*	аш	*N n*	эн	*U u*	у
B b	бэ	*I i*	и	*O o*	о	*V v*	вэ
C c	цэ	*J j*	йот	*P p*	пэ	*W w*	дубль-вэ
D d	дэ	*K k*	ка	*Q q*	ку	*X x*	икс
E e	э	*L l*	эль	*R r*	эр	*Y y*	игрек
F f	эф	*M m*	эм	*S s*	эс	*Z z*	зэт
G g	гэ			*T t*	тэ		

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы	Название	Буквы	Название	Буквы	Название	Буквы	Название
Α α	а́льфа	Η η	э́та	Ν ν	ню	Τ τ	та́у
Β β	бе́та	Θ θ ϑ	тэ́та	Ξ ξ	кси	Υ υ	и́псилон
Γ γ	га́мма	Ι ι	ио́та	Ο ο	о́микрон	Φ φ	фи
Δ δ	де́льта	Κ κ	ка́ппа	Π π	пи	Χ χ	хи
Ε ε	э́псилон	Λ λ	ла́мбда	Ρ ρ	ро	Ψ ψ	пси
Ζ ζ	дзе́та	Μ μ	мю	Σ σ	си́гма	Ω ω	оме́га


Цена 94 коп.